Chapitre 18 : Intégration

Exercice type 1

Soit $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ continue d'intégrale nulle sur $[0,1]$. On pose $m=\inf_{[0,1]} f$ et $M=\sup_{[0,1]} f$ (justifier l'existence de m et M). Que dire de la fonction $g=(M-f)(f-m)$? En déduire l'inégalité $\displaystyle\int_0^1 f^2\leqslant -mM$, puis que f s'annule au moins une fois.

Solution : La fonction f est continue sur $[0,1]$ donc admet un minimum et un maximum. On a alors $M-f\geqslant 0$ et $f-m\geqslant 0$ sur $[0,1]$, ainsi $g\geqslant 0$ sur $[0,1]$. On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 g\geqslant 0$ par croissance de l'intégrale. Mais

$$\int_0^1 g=(M+m)\int_0^1 f-\int_0^1 f^2-\int_0^1 Mm=-\int_0^1 f^2-Mm$$

car f est d'intégrale nulle sur $[0,1]$. On a donc

$$\int_0^1 f^2\leqslant -mM$$

De plus $f^2\geqslant 0$ donc $0\leqslant\displaystyle\int_0^1 f^2\leqslant -mM\Longrightarrow mM\leqslant 0$. Ainsi m et M sont de signes opposés, et puisque $m\leqslant M$, on a $m\leqslant 0\leqslant M$. Puisque m et M sont des valeurs prises par f, (l'image d'un segment par une fonction continue est un segment), il existe $(a,b)\in[0,1]^2$ tels que $m=f(a)$ et $M=f(b)$. D'après le TVI appliqué à f entre a et b, on en déduit que f s'annule au moins une fois.

Exercice type 2

Soit $p\in\mathbb{N}^*$, on définit $S_n(p)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}$ et $I_n(p)=\displaystyle\int_1^n\frac{1}{x^p}\,dx$.

1. Montrer, pour tout entier $k\geqslant 1$, $\dfrac{1}{(k+1)^p}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{x^p}\,dx\leqslant\frac{1}{k^p}$.
2. En déduire que pour tout entier $n\geqslant 2$:

$$S_n(p)-1\leqslant I_n(p)\leqslant S_{n-1}(p)$$

puis que la suite $(S_n(p))_{n\geqslant 1}$ converge si et seulement si $p\geqslant 2$.

Solution : L' idée développée dans cet exercice portent le nom de "comparaison séries-intégrales" (il est conseillé de faire un dessin).

1. Par décroissance de $x\longmapsto\dfrac{1}{x^p}$, on a $\forall x\in[k,k+1]$, $\dfrac{1}{(k+1)^p}\leqslant\dfrac{1}{x^p}\leqslant\dfrac{1}{k^p}$. On intègre alors entre k et $k+1$, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$\frac{1}{(k+1)^p}=\int_k^{k+1}\frac{dx}{(k+1)^p}\leqslant\int_k^{k+1}\frac{1}{x^p}\,dx\leqslant\frac{1}{k^p}=\int_k^{k+1}\frac{dx}{k^p}$$

2. Par Chasles, on a $I_n(p)=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{x^p}\,dx+\int_2^3\frac{1}{x^p}\,dx+\cdots+\int_{n-1}^n\frac{1}{x^p}\,dx=\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^p}\,dx$. Si on somme les inégalités de la question précédente, on obtient

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+1)^p}\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x^p}\,dx=I_n(p)\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k^p}=S_{n-1}(p)$$

Géry Huvent

Or pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^p} \underset{j=k+1}{=} \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j^p} = S_n(p) - 1$ d'où l'encadrement demandé.
Un calcul simple donne

$$I_n(p) = \int_1^n \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \text{ si } p = 1 \\ \left[\dfrac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^n = \dfrac{1}{p-1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{p-1}}\right) \text{ si } p \geqslant 2 \end{cases}$$

On peut maintenant conclure à l'équivalence

$$(S_n(p))_n \text{ converge } \iff p \geqslant 2$$

<u>Sens $\Longrightarrow$</u> : Supposons que $S_n(p)$ converge, alors $p \neq 1$ car si $p = 1$, on a $I_n(p) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et puisque $I_n(p) \leqslant S_{n-1}(p)$, par le théorème d'encadrement, on en déduit que $(S_n(p))_n$ diverge. Ainsi $p \geqslant 2$.
<u>Sens $\Longleftarrow$</u> : Supposons que $p \geqslant 2$, alors

$$S_n(p) \leqslant I_n(p) + 1 = \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{n^{p-1}}\right) + 1 \leqslant 1 + \frac{1}{p-1}$$

La suite est donc majorée, elle converge.

Exercice 1

Donner un équivalent de $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k$.

<u>Solution :</u> La fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \ln x$ est strictement croissante. On en déduit que pour $x \in [k, k+1]$, $\ln k \leqslant \ln x \leqslant \ln(k+1)$. Par croissance de l'intégrale sur $[k, k+1]$, on a alors

$$\int_k^{k+1} \ln(k)\,dx = \ln k \leqslant \int_k^{k+1} \ln(x)\,dx \leqslant \int_k^{k+1} \ln(k+1)\,dx = \ln(k+1)$$

On peut sommer ces inégalités pour k variant de 1 à $n-1$, on obtient alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} \ln k = u_n - \ln n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \ln(x)\,dx = \int_1^n \ln(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \sum_{i=2}^{n} \ln(i) = u_n - \ln(1) = u_n$$

Un calcul élémentaire (la primitive de $\ln x$ est $x\ln(x) - x$) donne $\displaystyle\int_1^n \ln(x)\,dx = n\ln(n) - n + 1$. On a donc

$$u_n - \ln n \leqslant n\ln(n) - n + 1 \leqslant u_n \iff n\ln(n) - n + 1 \leqslant u_n \leqslant n\ln(n) - n + \ln(n) + 1$$

Ce qui donne

$$1 \xleftarrow[n\to+\infty]{} 1 - \frac{n-1}{n\ln n} \leqslant \frac{u_n}{n\ln n} \leqslant 1 - \frac{n - \ln n - 1}{n\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et prouve que

$$u_n \sim n\ln(n)$$

Exercice type 3

On définit pour $n \geqslant 1$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{n+x}dx$. Donner la limite, puis un équivalent de u_n.

Solution : Pour $x \in [0, \pi]$, on a

$$0 \leqslant \frac{\sin x}{n+x} \leqslant \frac{1}{n} \text{ car } 0 \leqslant \sin x \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant n \leqslant n+x$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$0 \leqslant u_n = \int_0^\pi \frac{\sin x}{n+x} dx \leqslant \int_0^\pi \frac{dx}{n} = \frac{\pi}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Pour l'équivalent, on va améliorer l'encadrement. On pose $v_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{n} dx = \frac{1}{n}\int_0^\pi \sin x dx = \frac{2}{n}$. Alors

$$v_n - u_n = \int_0^\pi \sin x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) dx = \int_0^\pi \frac{x \sin x}{n(n+x)} dx = \frac{1}{n}\int_0^\pi \frac{x\sin x}{n+x} dx$$

Le même raisonnement que pour u_n donne

$$\forall x \in [0, \pi], \, 0 \leqslant \frac{x \sin x}{n+x} \leqslant \frac{\pi}{n} \Longrightarrow 0 \leqslant \int_0^\pi \frac{x\sin x}{n+x} dx \leqslant \int_0^\pi \frac{\pi dx}{n} = \frac{\pi^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a donc

$$u_n = v_n + \frac{1}{n}\varepsilon_n \text{ où} \varepsilon_n = -\int_0^\pi \frac{x\sin x}{n+x} dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui s'écit $u_n = \dfrac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, et donne l'équivalent $u_n \sim \dfrac{2}{n}$.

Exercice type 4

Formule de la moyenne : Soient f et g continues sur $[a, b]$ où $a < b$ avec g positive, montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt.$$

Application : Soit f définie et continue sur $\mathbb{R}$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^{2x} \frac{f(t)}{t} dt = f(0) \ln 2$.

Solution : La fonction f est continue sur $[a, b]$, l'image du segment $[a, b]$ est donc un segment $[m, M]$, il existe donc $(\alpha, \beta) \in [a, b]^2$ tels que

$$m = \min_{[a,b]} f = f(\alpha) \text{ et } M = \max_{[a,b]} f = f(\beta)$$

La positivité de g sur $[a, b]$ et la croissance de l'intégrale $(a < b)$ permet alors d'écrire que

$$\forall x \in [a, b], \; mg(x) \leqslant f(x) g(x) \leqslant Mg(x) \Longrightarrow m\int_a^b g(x) dx \leqslant \int_a^b f(x) g(x) dx \leqslant M \int_a^b g(x) dx$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(x) dx = 0$, alors g étant continue et positive, on a $g = 0$ et pour tout c de $[a, b]$ on a $0 = \displaystyle\int_a^b f(t) g(t) dt = f(c) \int_a^b g(t) dt = 0$.

Sinon, on a, en divisant par $\displaystyle\int_a^b g(x) dx \geqslant 0$ (car $g \geqslant 0$) ce qui ne change pas le sens de l'inégalité :

$$f(\alpha) = m \leqslant \frac{\displaystyle\int_a^b f(x) g(x) dx}{\displaystyle\int_a^b g(x) dx} \leqslant M = f(\beta)$$

D'après le TVI, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f\left(c\right)=\dfrac{\displaystyle\int_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)dx}{\displaystyle\int_a^b g\left(x\right)dx}$.

Application : L'intégrale existe pour $x>0$ car $[x,2x]\subset\mathbb{R}^*$. Pour $x\neq 0$, on applique la formule de la moyenne avec $g\left(t\right)=t\geqslant 0$, il existe $c\in[x,2x]$ tel que $\displaystyle\int_x^{2x}\frac{f\left(t\right)}{t}dt=f\left(c\right)\int_x^{2x}\frac{dt}{t}=f\left(c\right)\times\ln 2$. Puisque $x\leqslant c\leqslant 2x$ on a $c\xrightarrow[x\to 0^+]{}0$, et par continuité de f en $x=0$, il vient $f\left(c\right)\xrightarrow[x\to 0^+]{}f\left(0\right)$. Ainsi

$$\int_x^{2x}\frac{f\left(t\right)}{t}dt=f\left(c\right)\times\ln 2\xrightarrow[x\to 0^+]{}f\left(0\right)\ln 2.$$

Remarque : Si $a>b$, on a le même résultat, en effet $\displaystyle\int_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)dt=-\int_b^a f\left(t\right)g\left(t\right)dt$. On applique le résultat précédent à $\displaystyle\int_b^a f\left(t\right)g\left(t\right)dt$ pour obtenir, $\displaystyle\int_a^b f\left(t\right)g\left(t\right)dt=-f\left(c\right)\int_b^a g\left(t\right)dt=f\left(c\right)\int_a^b g\left(t\right)dt$. où $c\in[b,a]$. De même si g est négative, on a le même résultat (on a deux inversions de l'inégalité).

Exercice 2

Soit f une fonction de classe C^1 sur $[a,b]$. avec $a<b$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt$ tendent vers 0 quand $|\lambda|$ tend vers $+\infty$. (lemme de Riemann-Lebesgue).

Solution : Puisque f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, on peut intégrer par parties en dérivant f. On a alors, pour $\lambda\neq 0$

$$\begin{array}{ll} u\left(t\right)=f\left(t\right) & u'\left(t\right)=f'\left(t\right) \\ v'\left(t\right)=e^{i\lambda t} & v\left(t\right)=\dfrac{1}{i\lambda}e^{i\lambda t}=-\dfrac{i}{\lambda}e^{i\lambda t}\end{array},\ u,v\text{ sont }\mathcal{C}^1\text{ sur }[a,b]$$

$$\int_a^b f\left(t\right)e^{i\lambda t}dt=\left[-\frac{i}{\lambda}e^{i\lambda t}f\left(t\right)\right]_a^b+\frac{i}{\lambda}\int_a^b f'\left(t\right)e^{i\lambda t}dt=-\frac{i}{\lambda}\left(e^{i\lambda b}f\left(b\right)-e^{i\lambda a}f\left(a\right)\right)+\frac{i}{\lambda}\int_a^b f'\left(t\right)e^{i\lambda t}dt$$

On en déduit que

$$\left|\int_a^b f\left(t\right)e^{i\lambda t}dt\right|\leqslant\left|\frac{i}{\lambda}\left(e^{i\lambda b}f\left(b\right)-e^{i\lambda a}f\left(a\right)\right)\right|+\left|\frac{i}{\lambda}\int_a^b f'\left(t\right)e^{i\lambda t}dt\right|$$

Puisque f est continue sur $[a,b]$, elle est bornée sur $[a,b]$, soit M un majorant de $|f|$ sur $[a,b]$ (par exemple $M=\sup\limits_{[a,b]}|f|$) alors

$$\begin{aligned}\left|\frac{i}{\lambda}\left(e^{i\lambda b}f\left(b\right)-e^{i\lambda a}f\left(a\right)\right)\right| &\leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(\left|e^{i\lambda b}f\left(b\right)\right|+\left|e^{i\lambda a}f\left(a\right)\right|\right)=\frac{|f\left(b\right)|+|f\left(a\right)|}{|\lambda|}\leqslant\frac{2M}{|\lambda|}\\ \left|\frac{i}{\lambda}\int_a^b f'\left(t\right)e^{i\lambda t}dt\right| &= \frac{1}{|\lambda|}\left|\int_a^b f'\left(t\right)e^{i\lambda t}dt\right|\leqslant\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b\left|f'\left(t\right)e^{i\lambda t}\right|dt=\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b|f'\left(t\right)|\,dt\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\int_a^b f\left(t\right)e^{i\lambda t}dt\right|\leqslant\frac{2M}{|\lambda|}+\frac{1}{|\lambda|}\int_a^b|f'\left(t\right)|\,dt\xrightarrow[|\lambda|\to+\infty]{}0$$

Enfin, puisque $|\mathrm{Re}\left(z\right)|\leqslant|z|$ et $|\mathrm{Im}\left(z\right)|\leqslant|z|$, on en conclut que

$$\int_a^b f(t)\cos(\lambda t)dt\text{ et }\int_a^b f(t)\sin(\lambda t)dt\text{ tendent vers 0 si }|\lambda|\text{ tend vers }+\infty$$

Exercice 3

On définit F sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}\frac{dt}{t+1-e^{-t}}$. Justifier que F est bien définie sur $]0,+\infty[$, déterminer sa limite en $+\infty$.

Solution : Soit $\varphi : t\longmapsto \dfrac{1}{t+1-e^{-t}}$, pour $t>0$, on a $0<e^{-t}<1$, ainsi $1-e^{-t}>0\Longrightarrow t+1-e^{-t}>0$. La fonction φ est donc définie et continue (inverse d'une fonction continue et non nulle) sur $]0,+\infty[$. Pour $x>0$, on a $[x,2x]\subset\,]0,+\infty[$, ainsi φ est intégrable sur $[x,2x]$ (car continue), ceci prouve que $F(x)$ existe pour $x>0$.
Pour la limite en $+\infty$, si $t>0$, on a $0<e^{-t}<1\Longrightarrow 0<1-e^{-t}<1\Longrightarrow 0<t<t+1-e^{-t}<t+1$ et en passant à l'inverse

$$\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{t+1}\leqslant f(t)\leqslant\frac{1}{t}$$

On intégre cette inégalité sur $[x,2x]$ pour obtenir

$$\forall x>0,\ \int_x^{2x}\frac{dt}{t+1}\leqslant\int_x^{2x}f(t)\,dt\leqslant\int_x^{2x}\frac{dt}{t}$$

soit

$$\ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right)=[\ln(t+1)]_x^{2x}\leqslant F(x)\leqslant[\ln t]_x^{2x}=\ln\left(\frac{2x}{x}\right)=\ln(2)$$

Puisque $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ln(2)$, on a par encadrement $F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ln(2)$.

Exercice type 5

On définit f par $f(x)=e^{x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$. Justifier que f est bien définie et est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, est impaire et vérifie l'équation différentielle $y'-2xy=1$. Donner une relation entre $f^{(n+1)}$, $f^{(n)}$ et $f^{(n-1)}$ pour $n\geqslant 1$.

Solution : La fonction $\varphi : t\longmapsto e^{-t^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$, ainsi $F : x\longmapsto\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $F'=\varphi$. Puisque φ est $\mathcal{C}^\infty$, on en déduit que F est également $\mathcal{C}^\infty$. Il en découle que f est définie et $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$).
Pour $x\in\mathbb{R}$, on a alors

$$f'(x)=2xe^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt+e^{x^2}\times e^{-x^2}=2xf(x)+1$$

ce qui prouve que f est bien solution de l'équation différentielle $y'-2xy=1$. Posons $h:x\longmapsto xf(x)$, on a donc $f'-2h=1$, pour $n\geqslant 1$, on en déduit que

$$(f'-2h)^{(n)}=0\Longrightarrow f^{(n+1)}-2h^{(n)}=0$$

Mais puisque $g:x\longmapsto x$ et f sont $\mathcal{C}^\infty$, la formule de Leibniz donne (en utilisant $g^{(k)}=0$ si $k\geqslant 2$)

$$\begin{aligned}h^{(n)}(x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}g^{(k)}(x)\,f^{(n-k)}(x)=\binom{n}{0}g^{(0)}(x)\,f^{(n-0)}(x)+\binom{n}{1}g^{(1)}(x)\,f^{(n-1)}(x)\\&=xf^{(n)}(x)+nf^{(n-1)}(x)\end{aligned}$$

On a donc

$$\forall n\geqslant 1,\ f^{(n+1)}(x)=2xf^{(n)}(x)+2nf^{(n-1)}(x)$$

Exercice type 6

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$. Déterminer sa limite.

Solution : On a

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k^2}{n^2}}$$

on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ défininе par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, on sait que u_n converge alors vers

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan x]_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

Exercice type 7

Calculer la limite de $u_n = \frac{1}{n^2}\prod_{k=1}^{n}\left(n^2+k^2\right)^{\frac{1}{n}}$.

Solution : On a $u_n > 0$, on peut passer au logarithme.

$$\begin{aligned}\ln u_n &= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n^2+k^2\right) = -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(n^2\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right)\\ &= -2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(2\ln n + \ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\right) = -2\ln n + 2\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)\end{aligned}$$

est une somme de Riemann à pour la fonction continue $f(x) = \ln\left(1+x^2\right)$ entre 0 et 1. Ainsi

$$\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx$$

On intègre par parties (on dérive $\ln\left(1+x^2\right)$) pour obtenir,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln\left(1+x^2\right)dx &= \ln 2 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 \frac{2\left(x^2+1-1\right)}{x^2+1}\,dx\\ &= \frac{1}{2}\pi + \ln 2 - 2\end{aligned}$$

d'où, par continuité de l'exponentielle

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2e^{\frac{\pi}{2}-2}$$

Exercice type 8

Donner un équivalent de la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

Solution : On associe à $(u_n)_n$ une somme de Riemann. On définit donc pour $n \geqslant 1$, $v_n = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}}$ qui est une somme de Riemann pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$. On a donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \sqrt{x}dx = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\dfrac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}$. En particulier, on a

$$v_n \sim \frac{2}{3}$$

On peut conclure puisque

$$u_n = n\sqrt{n}v_n = n^{\frac{3}{2}}v_n \sim \frac{2}{3}n^{\frac{3}{2}}$$

Exercice 4

1. Montrer que pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$.
2. Déterminer la limite de la suite $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\dfrac{k}{n}\right)\sin\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Solution :

1. Pour l'inégalité de gauche. On peut faire une étude de fonction, mais la formule de taylor à l'ordre 3, avec reste intégral pour la fonction sin entre 0 et x s'écrit

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \int_0^x \frac{(x-t)^3}{3!}\sin t dt$$

Si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $\forall t \in [0,x]$, on a $\sin t \geqslant 0$ donc $\dfrac{(x-t)^3}{3!}\sin t \geqslant 0$, ainsi $\int_0^x \dfrac{(x-t)^3}{3!}\sin t dt \geqslant 0$ et $\sin x \geqslant x - \dfrac{x^3}{6}$. L'autre inégalité provient de la convexité.

2. On a alors, puisque $\sin\dfrac{k}{n} \geqslant 0$ lorsque $k \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

La somme de droite

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

est une somme de Riemann pour la fonction continue $f(x) = x\sin x$ sur l'intervalle $[0,1]$, on a donc

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x\sin x dx$$

On cherche une primitive de xe^{ix} sous la forme $(ax+b)e^{ix}$, on dérive pour avoir

$$ae^{ix} + i(ax+b)e^{ix} = xe^{ix} \Longrightarrow ai = 1 \text{ et } a + ib = 0 \Longrightarrow a = -i \text{ et } b = 1$$

$$\int xe^{ix}dx = (-ix+1)e^{ix} + K \Longrightarrow \int x\sin x dx = \sin x - x\cos x + C$$

d'où

$$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 x \sin x dx = \sin 1 - \cos 1$$

Pour la somme de gauche, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{6n^6}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right) = Sn - \frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)$$

Or

$$\left|\sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant \sum_{k=1}^{n} n^3 = n^4$$

d'où

$$0 \leqslant \left|\frac{1}{6n^6} \sum_{k=1}^{n} k^3 \sin\left(\frac{k}{n}\right)\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n^2} - \frac{k^3}{n^6}\right) \sin\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1$$

conclusion

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin 1 - \cos 1$$