Chapitre 2 : Etudes de fonctions.

Exercice type 1

Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. Endéduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^k \leqslant \frac{4}{3}$.

Solution : Si $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{4} - x(1-x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Prenons alors $x \in \left]0,1\right[$, alors $\forall k \in \{0, \cdots, n\}$, $(x(1-x))^k = x^k (1-x)^k \leqslant \dfrac{1}{4^k}$, en sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \dfrac{1}{4}} \leqslant \frac{1}{1 - \dfrac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$
2. En déduire que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
3. Etablir alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$.

Solution : Rappel : $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k = 2 \times \cdots \times k = \displaystyle\prod_{i=2}^{k} i$, le second produit ayant $k-1$ termes.

1. Si i vérifie $2 \leqslant i \leqslant k$, alors $\displaystyle\prod_{i=2}^{k} 2 = 2^{k-1} \leqslant \prod_{i=2}^{k} i$. En passant à l'inverse (nombres positifs), on a $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
2. On a alors $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} = \dfrac{1}{k!} \times \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{1}{k!} \times (n(n-1)\cdots(n-k+1)) = \dfrac{1}{k!} \times \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$. Dans le produit, tous les termes sont inférieurs à n donc
$$\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = (n(n-1)\cdots(n-k+1)) \leqslant n^k \text{ (de 0 à } k-1\text{, il y a } k \text{ termes)}$$
On a donc $0 \leqslant \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$ et $0 \leqslant \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \leqslant n^k$, on en déduit que $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
3. Si $n \geqslant 1$, par le binôme, on a
$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{k=\mathbf{2}}^{n} \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + n \times \frac{1}{n} + \sum_{k=\mathbf{2}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

Exercice type 2

Soit $f(x)=\dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$ et $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ étudier leur parité.

Solution : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (car $e^{4x}=1 \iff 4x=0 \iff x=0$). Si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$ et

$$f(-x)=\frac{e^{-5x}+e^{x}}{e^{-4x}-1}=\frac{\frac{1}{e^{5x}}+\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{4x}}-1}=\frac{e^{-x}+e^{5x}}{1-e^{4x}}=-f(x)\,,\ f \text{ est impaire}$$

Pour g, on sait que $\forall x\in\mathbb{R},\ -x\leqslant |x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{1+x^2}\Longrightarrow x+\sqrt{1+x^2}>0$ et ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$. Puis

$$g(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Or (retenir), $\sqrt{a}-b=\dfrac{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)}{\sqrt{a}+b}=\dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$ d'où $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)=\ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et g est aussi impaire.

Exercice type 3

Trouver toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ |f(x)+f(y)|=|x+y|$.

Solution : On travaille par Analyse-Synthèse.
Analyse : On commence par déterminer $f(0)$. Avec $x=y=0$, on obtient $2|f(0)|=0\Longrightarrow f(0)=0$. Puis avec $x\in\mathbb{R}$ et $y=0$, on obtient $|f(x)|=|x|$. Ainsi, à x fixé, on a $f(x)=x$ ou $f(x)=-x$. Mais le signe peut, à priori, changer lorsque x change (on peut avoir $f(1)=1$ et $f(2)=-2$).
Montrons que le signe est constant. Supposons qu'il existe x et y tels que $f(x)=x$ et $f(y)=-y$, alors

$$|f(x)+f(y)|=|x-y|=|x+y|$$

Or $|u|=|v|\iff u=v$ ou $u=-v$, on en déduit que

$$\left\{\begin{array}{c} x-y=x+y \\ \text{ou } x-y=-(x+y)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} y=0 \\ \text{ou } x=0\end{array}\right.$$

Si $x=0$, alors $f(x)=0=x=-x$, de même si $y=0$ alors $f(y)=0=-y=y$. Donc le signe est bien le même pour x et pour y. Donc $f=Id_{\mathbb{R}}$ ou $f=-Id_{\mathbb{R}}$.
Synthèse : Les fonctions $Id_{\mathbb{R}}$ et $-Id_{\mathbb{R}}$ sont clairement solutions.

Exercice type 4

Pour $m\in\mathbb{R}$, on définit $f_m(x)=\dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x=0$ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x=1$ sont concourantes.

Solution : Les fonctions f_m sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Un calcul simple donne $f'_m(x) = \dfrac{(1+x^2) - 2x(x+m)}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{x^2+2mx-1}{(x^2+1)^2}$.

1. Puisque $f'_m(0) = 1$, toutes les tangentes en $x = 0$ ont même coefficient directeur (égal à 1). Elles sont parallèle à la premier bissectrice $y = x$.
2. Puisque $f_m(1) = \dfrac{m+1}{2}$ et $f'_m(1) = -\dfrac{m}{2}$ l'équation de la tangente T_m en $x = 1$ à C_m est $y = \dfrac{m+1}{2} - \dfrac{m}{2}(x-1)$.
   Par analyse-synthèse.
   Analyse : si les tangentes sont concourantes en un point A, alors A est sur T_0 et sur T_{-1}. Ses coordonnées vérifient donc
   $$\begin{cases} y = \dfrac{0+1}{2} - \dfrac{0}{2} \times (x-1) = \dfrac{1}{2} \ (A \in T_0) \\ y = \dfrac{-1+1}{2} + \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}(x-1) \ \ (A \in T_{-1}) \end{cases}$$
   Les coordonnées de A sont donc $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Mais A est, a priori, uniquement sur T_0 et sur T_{-1}.
   Synthèse : Le point $A = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ est sur T_m car $\frac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2} - \dfrac{m}{2}(2-1)$.
   Conclusion : Les tangentes sont concourantes en $A = \left(2, \frac{1}{2}\right)$.

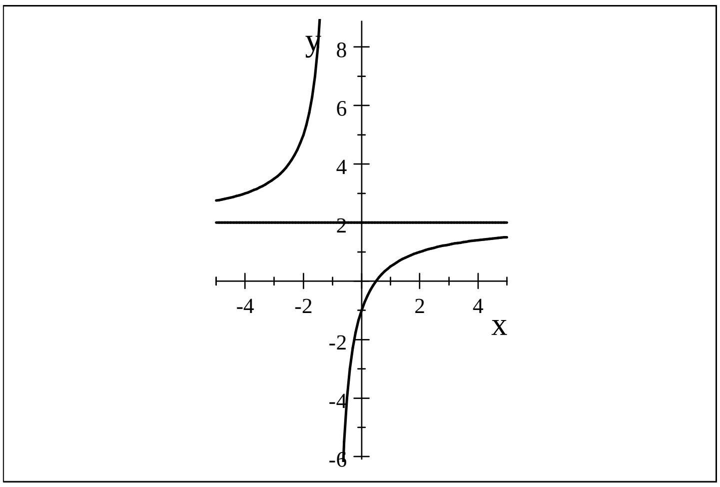
Exercice 2

Soit f définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, montrer que f admet un centre de symétrie. Etudier les variations de f sur son domaine de définition. Déterminer les x tels que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Solution : On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, le centre de symétrie ne peut donc avoir que -1 comme abscisse. On calcule donc $f(-1+a) + f(-1-a) = \dfrac{-2+2a-1}{a} + \dfrac{-2-2a-1}{-a} = 4$. Le centre de symétrie est donc $\Omega : (-1, 2)$. On réduit l'intervalle d'étude à $]-1, +\infty[$. On peut dériver (quotient de fonctions affines) et $f'(x) = \left(\dfrac{2x+2-3}{x+1}\right)' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$. La fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ (mais pas sur D_f). Puisque $\lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1} 2x - 1 = -3$, on a $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$. Enfin, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 2$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$.
On a donc les variations suivantes

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$		$\|\|$	$-\infty \nearrow 2$	

Et le graphe de f est :



On a donc $f(x) > 2$ si $x < 0$, et $0 < x \Longrightarrow f(0) = -1 \leqslant f(x) < 2$. Conclusion $f^{-1}([-1,2]) = [0,+\infty[$.

Exercice type 5

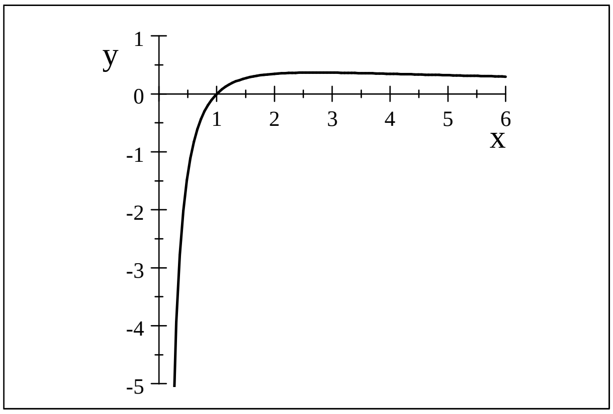
A l'aide d'une étude de fonctions, préciser le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = m$ où m est un paramétre.

Résoudre l'équation pour $m = \ln\sqrt{2}$.

Solution : Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, f est définie et dérivable (par quotient) sur $]0,+\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{1-\ln x}{x^2}$ du signe de $1-\ln(x)$. On en déduit que

$$f \text{ est croissante sur }]1,e] \text{ décroissante sur } [e,+\infty[$$

En $x = 0^+$, on a $\ln(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ d'où $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -\infty$. En $+\infty$, on sait (croissances comparées) que $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$. On en déduit le graphe de f sur $]0,+\infty[$:



Si $m \in]-\infty,0]$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution $x \in]0,1]$.
Si $m \in]0, f(e)[=]0, e^{-1}[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions $x_1 \in]1,e[$ et $x_2 \in]e,+\infty[$.
Enfin $f(x) = \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution $x = e$.
Pour $m = \ln\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, l'équation admet au moins une solution $x = 2$, mais on a aussi $\dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$, donc elle admet deux solutions (et pas plus), $x = 2$ et $x = 4 = 4$.

Exercice type 6

On sait que $\forall x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$.

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$ puis que $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Donner un encadrement de u_n. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Solution : Rappel : $\sin x \leqslant$ se prouve en étudiant $\varphi(x) = x - \sin x$.

1. On pose $f(x) = \cos(x) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$, alors f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x) = -\sin x + x \geqslant 0$. Ainsi f est croissante sur $[0,+\infty[$ et $f(x) \geqslant f(0) = 0$.
   Puis on pose $g(x) = \sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$, alors g est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = f(x) \geqslant 0$ d'où g est croissante sur $[0,+\infty[$ et $g(x) \geqslant g(0) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\dfrac{k}{n^2} \geqslant 0$ d'où

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

On somme ces inégalités pour avoir

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\right) \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n\,(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = w_n$$

Mais

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 = w_n - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Puisque

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leqslant \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant \frac{1}{6n^6} \times \underbrace{n \times n^3}_{\text{nb termes}\times\text{plusgrand}} = \frac{1}{\cancel{6}n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ et par encadrement

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$