Chapitre 2 : Etudes de fonctions.

Exercice type 1

Montrer que pour $x \in [0,1]$, on a $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^k \leqslant \frac{4}{3}$.

Solution : Si $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{4} - x(1-x) = x^2 - x + \dfrac{1}{4} = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$. Prenons alors $x \in \left]0,1\right[$, alors $\forall k \in \{0, \cdots, n\}$, $(x(1-x))^k = x^k (1-x)^k \leqslant \dfrac{1}{4^k}$, en sommant, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k} = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \leqslant \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

1. Montrer que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\quad \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$
2. En déduire que $\forall k \in \{2, ..., n\}$, $\quad \dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
3. Etablir alors que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \leqslant 3$.

Solution : Rappel : Si $k \geqslant 2$, $k! = 1 \times 2 \times \cdots \times k = 2 \times \cdots \times k = \displaystyle\prod_{i=2}^{k} i$, le second produit ayant $k-1$ termes.

1. Si i vérifie $2 \leqslant i \leqslant k$, alors $\displaystyle\prod_{i=2}^{k} 2 = 2^{k-1} \leqslant \prod_{i=2}^{k} i$. En passant à l'inverse (nombres positifs), on a $\dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
2. On a alors $\dbinom{n}{k} = \dfrac{1}{k!} \times \dfrac{n!}{(n-k)!} = \dfrac{1}{k!} \times (n(n-1)\cdots(n-k+1)) = \dfrac{1}{k!} \times \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)$. Dans le produit, tous les termes sont inférieurs à n donc

$$\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) = (n(n-1)\cdots(n-k+1)) \leqslant n^k \text{ (de 0 à } k-1\text{, il y a } k \text{ termes)}$$

   On a donc $0 \leqslant \dfrac{1}{k!} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$ et $0 \leqslant \displaystyle\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \leqslant n^k$, on en déduit que $\dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ d'où $\dfrac{\binom{n}{k}}{n^k} \leqslant \dfrac{1}{2^{k-1}}$.
3. Si $n \geqslant 1$, par le binôme, on a

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k = \binom{n}{0} \times \left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1} \times \left(\frac{1}{n}\right)^1 + \sum_{k=\mathbf{2}}^{n} \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{n}\right)^k \\ &= 1 + n \times \frac{1}{n} + \sum_{k=\mathbf{2}}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} \leqslant 2 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2^i}\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} \leqslant 1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3$$

Exercice type 2

Soit $f(x) = \dfrac{e^{5x}+e^{-x}}{e^{4x}-1}$ et $g(x) = \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ étudier leur parité.

Solution : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ (car $e^{4x} = 1 \Longleftrightarrow 4x = 0 \Longleftrightarrow x = 0$). Si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$ et

$$f(-x) = \frac{e^{-5x}+e^{x}}{e^{-4x}-1} = \frac{\frac{1}{e^{5x}}+\frac{1}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{4x}}-1} = \frac{e^{-x}+e^{5x}}{1-e^{4x}} = -f(x)\,,\ f \text{ est impaire}$$

Pour g, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \leqslant |x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2} \Longrightarrow x+\sqrt{1+x^2} > 0$ et ainsi g est définie sur $\mathbb{R}$. Puis

$$g(-x) = \ln\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

Or (retenir), $\sqrt{a}-b = \dfrac{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)}{\sqrt{a}+b} = \dfrac{a-b^2}{\sqrt{a}+b}$ d'où $\sqrt{1+x^2}-x = \dfrac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}$. Ainsi $\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = \ln\left(\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\right) = -\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ et g est aussi impaire.

Exercice type 3

Trouver toutes les applications f définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x)+f(y)| = |x+y|$.

Solution : On travaille par Analyse-Synthèse.
Analyse : On commence par déterminer $f(0)$. Avec $x = y = 0$, on obtient $2|f(0)| = 0 \Longrightarrow f(0) = 0$. Puis avec $x \in \mathbb{R}$ et $y = 0$, on obtient $|f(x)| = |x|$. Ainsi, à x fixé, on a $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. Mais le signe peut, à priori, changer lorsque x varie (on peut avoir $f(1) = 1$ et $f(2) = -2$ par exemple). Montrons que le signe est constant, c'est à dire que ou bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ ou bien $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x$.
Supposons qu'il existe x et y tels que $f(x) = x$ et $f(y) = -y$, alors

$$|f(x)+f(y)| = |x-y| = |x+y|$$

On a alors, en élevant au carré

$$|x+y|^2 = |x-y|^2 \Longrightarrow (x+y)^2-(x-y)^2 \Longrightarrow 4xy = 0 \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} y = 0 \\ \text{ou } x = 0 \end{array}\right.$$

Si $x = 0$, alors $f(x) = 0 = x = -x$ et $f(y) = -y$, le signe est donc identique. De même si $y = 0$ alors $f(y) = 0 = -y = y$ et $f(x) = x$. Donc le signe est bien le même pour x et pour y. Ainsi $f = Id_{\mathbb{R}}$ ou $f = -Id_{\mathbb{R}}$.
Synthèse : Les fonctions $Id_{\mathbb{R}}$ et $-Id_{\mathbb{R}}$ sont clairement solutions.

Exercice type 4

Pour $m \in \mathbb{R}$, on définit $f_m(x) = \dfrac{x+m}{x^2+1}$. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m.

1. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 0$ sont parallèles.
2. Montrer que les tangentes aux courbes $\mathcal{C}_m$ au point d'abscisse $x = 1$ sont concourantes.

Solution : Les fonctions f_m sont bien définies et dérivables sur $\mathbb{R}$. Un calcul simple donne $f_m'(x) = \dfrac{(1+x^2) - 2x(x+m)}{(1+x^2)^2} = -\dfrac{x^2+2mx-1}{(x^2+1)^2}$.

1. Puisque $f_m'(0) = 1$, toutes les tangentes en $x = 0$ ont même coefficient directeur (égal à 1). Elles sont parallèles à la premier bissectrice $y = x$.
2. Puisque $f_m(1) = \dfrac{m+1}{2}$ et $f_m'(1) = -\dfrac{m}{2}$ l'équation de la tangente T_m en $x = 1$ à C_m est $y = \dfrac{m+1}{2} - \dfrac{m}{2}(x-1)$.
   Par analyse-synthèse.
   Analyse : si les tangentes sont concourantes en un point A, alors A est sur T_0 et sur T_{-1}. Ses coordonnées vérifient donc
   $$\begin{cases} y = \dfrac{0+1}{2} - \dfrac{0}{2} \times (x-1) = \dfrac{1}{2} \ (A \in T_0) \\ y = \dfrac{-1+1}{2} + \dfrac{1}{2}(x-1) = \dfrac{1}{2}(x-1) \ \ (A \in T_{-1}) \end{cases}$$
   Les coordonnées de A sont donc $\left(2, \frac{1}{2}\right)$. Mais A est, a priori, uniquement sur T_0 et sur T_{-1}.
   Synthèse : Le point $A = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ est sur T_m car $\frac{1}{2} = \dfrac{m+1}{2} - \dfrac{m}{2}(2-1)$.
   Conclusion : Les tangentes sont concourantes en $A = \left(2, \frac{1}{2}\right)$.

Exercice 2

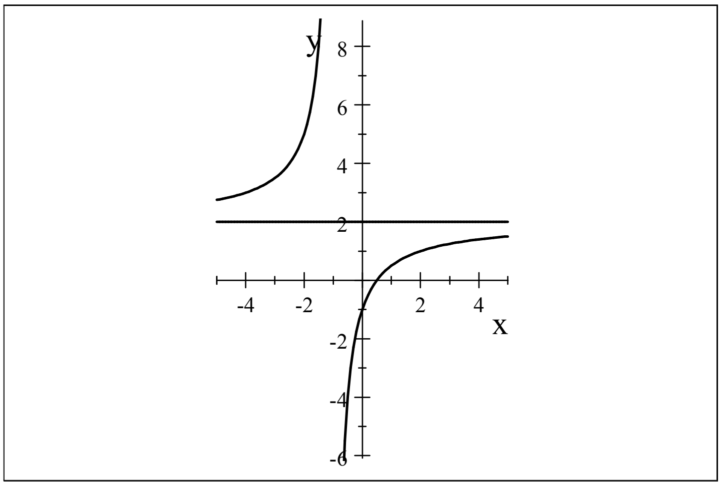
Soit f définie pour $x \neq -1$ par $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+1}$, montrer que f admet un centre de symétrie. Etudier les variations de f sur son domaine de définition. Déterminer les x tels que $-1 \leqslant f(x) \leqslant 2$.

Solution : On a $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, le centre de symétrie ne peut donc avoir que -1 comme abscisse. On calcule donc $f(-1+a) + f(-1-a) = \dfrac{-2+2a-1}{a} + \dfrac{-2-2a-1}{-a} = 4$. Le centre de symétrie est donc $\Omega : (-1, 2)$. On réduit l'intervalle d'étude à $]-1, +\infty[$. On peut dériver (quotient de fonctions affines) et $f'(x) = \left(\dfrac{2x+2-3}{x+1}\right)' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0$. La fonction est donc strictement croissante sur $]-\infty, -1[$ et sur $]-1, +\infty[$ (mais pas sur D_f). Puisque $\lim\limits_{x \to -1^-} (x+1) = 0^-$, $\lim\limits_{x \to -1^+} (x+1) = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to -1} 2x - 1 = -3$, on a $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$. Enfin, $f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} 2$ et $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 2$.

On a donc les variations suivantes

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)$	$2 \nearrow +\infty$		$\|\|$	$-\infty \nearrow 2$	

Et le graphe de f est :



On a donc $f(x) > 2$ si $x < 0$, et $0 < x \Longrightarrow f(0) = -1 \leqslant f(x) < 2$. Conclusion $f^{-1}([-1, 2]) = [0, +\infty[$.

Exercice type 5

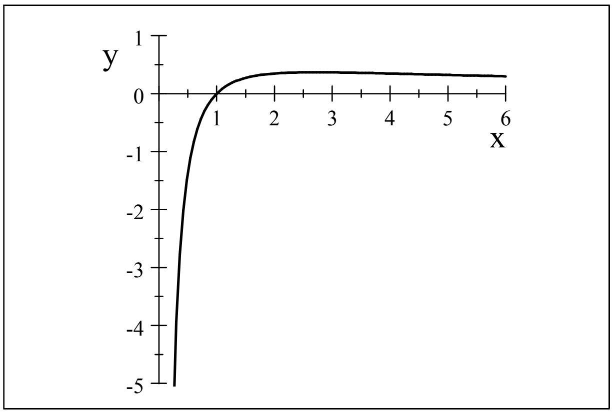
A l'aide d'une étude de fonctions, préciser le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{\ln x}{x} = m$ où m est un paramétre.

Résoudre l'équation pour $m = \ln\sqrt{2}$.

Solution : Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, f est définie et dérivable (par quotient) sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$ du signe de $1 - \ln(x)$. On en déduit que

$$f \text{ est croissante sur }]1, e] \text{ décroissante sur } [e, +\infty[$$

En $x = 0^+$, on a $\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$ d'où $f(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$. En $+\infty$, on sait (croissances comparées) que $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0^+$. On en déduit le graphe de f sur $]0, +\infty[$:



Si $m \in]-\infty, 0]$, l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution $x \in]0, 1]$.
Si $m \in]0, f(e)[= \left]0, e^{-1}\right[$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions $x_1 \in]1, e[$ et $x_2 \in]e, +\infty[$.
Enfin $f(x) = \dfrac{1}{e}$ admet une unique solution $x = e$.
Pour $m = \ln\left(\sqrt{2}\right) = \dfrac{\ln 2}{2}$, l'équation admet au moins une solution $x = 2$, mais on a aussi $\dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$, donc elle admet deux solutions (et pas plus), $x = 2$ et $x = 4$.

Exercice type 6

On sait que $\forall x \geqslant 0$, $\sin(x) \leqslant x$.

1. Montrer que $\forall x \geqslant 0$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos(x)$ puis que $x - \dfrac{x^3}{6} \leqslant \sin(x)$.
2. On définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$. Donner un encadrement de u_n. En déduire que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.

Solution :

1. L'inégalité $\sin x \leqslant x$ se prouve à l'aide de l'IAF. En effet si on pose $f(u) = \sin u$ alors $f'(u) = \cos(u) \leqslant 1$. L'IAF appliquée entre 0 et $x > 0$ donne
$$\sin x - \sin 0 \leqslant 1 \times (x - 0)$$
soit $\sin x \leqslant x$;
On pose $f(x) = \cos(x) - \left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)$, alors f est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $f'(x) = -\sin x + x \geqslant 0$. Ainsi f est

croissante sur $[0,+\infty[$ et $f(x) \geqslant f(0) = 0$.

Puis on pose $g(x) = \sin(x) - \left(x - \dfrac{x^3}{6}\right)$, alors g est définie, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $g'(x) = f(x) \geqslant 0$ d'où g est croissante sur $[0,+\infty[$ et $g(x) \geqslant g(0) = 0$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leqslant k \leqslant n$, on a $\dfrac{k}{n^2} \geqslant 0$ d'où

$$\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 \leqslant \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) \leqslant \frac{k}{n^2}$$

On somme ces inégalités pour avoir

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\right) \leqslant u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n} = w_n$$

Mais

$$v_n = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2} - \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n^2}\right)^3 = \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 = w_n - \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3$$

Puisque

$$w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \text{ et } 0 \leqslant \frac{1}{6n^6}\sum_{k=1}^{n} k^3 \leqslant \frac{1}{6n^6} \times \underbrace{n \times n^3}_{\text{nb termes}\times\text{plusgrand}} = \frac{1}{6n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On a $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ et par encadrement

$$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Exercice type 7

On souhaite déterminer la limite de

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

1. Montrer que $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.
2. En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 1$
3. En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$.

Solution :

1. Soit f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(u) = \ln(u)$, pour $x > 0$, f est définie, continue sur $[x, x+1]$, dérivable sur $]x, x+1[$ avec $f'(u) = \dfrac{1}{u}$. Pour $u \in [x, x+1]$, on a

$$0 < x \leqslant u \leqslant x+1 \Longrightarrow \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{u} \leqslant \frac{1}{x}$$

L'IAF appliquée à f donne ainsi

$$\frac{1}{x+1} \leqslant \ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x}.$$

2. L'inégalité de droite donne une majoration de $\dfrac{1}{x}$. Puis, pour $x > 1$, l'inégalité de gauche appliquée à $x - 1 > 0$ donne au final

$$\ln(x+1) - \ln(x) \leqslant \frac{1}{x} \leqslant \ln(x) - \ln(x-1)$$

3. Pour $n \geqslant 1$, on a donc avec $x = k \geqslant n+1 \geqslant 2 > 1$
$$\ln(k+1) - \ln(k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \ln(k) - \ln(k-1)$$
On somme ces inégalités pour avoir
$$\sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \leqslant u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k) - \ln(k-1))$$
Mais
$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k+1) - \ln(k)) &= \ln(n+2) - \ln(n+1) + \ln(n+3) - \ln(n+2) + \cdots + \ln(2n+1) - \ln(2n) \\ &= \ln(2n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln\left(\frac{2n+2-1}{n+1}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$
et
$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{2n} (\ln(k) - \ln(k-1)) &= \ln(n+1) - \ln(n) + \ln(n+2) - \ln(n+1) + \cdots + \ln(2n) - \ln(2n-1) \\ &= \ln(2n) - \ln(n) = \ln(2) \end{aligned}$$
On a donc
$$\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant u_n \leqslant \ln(2)$$
Par encadrement on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ln 2$.

Exercice type 8

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = e^{-\frac{u_n}{2}}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 0$.
2. Soit f définie par $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$, montrer que $\forall x \geqslant 0$, $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$. Que peut-on en déduire pour f ?
3. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ positive et que $\ell \in [0,1]$.
4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$ puis en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
5. A partir de quel rang est-on certain que u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près ?

Solution :

1. Par récurrence on montre $\mathcal{P}(n) =$ "u_n existe et $u_n \geqslant 0$". C'est vrai au rang $n = 0$, puis si c'est vrai au rang n alors $u_{n+1} = e^{-\frac{u_n}{2}}$ existe et est positif (ne pas oublier de montrer que u_n existe car cela n'est pas toujours évident, par exemple si $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$ et $u_0 = -1$, alors u_1 n'existe pas ...).
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \geqslant 0$, $f'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}$. Ainsi $|f'(x)| = \frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \leqslant \frac{1}{2}$ car pour $u \leqslant 0$ on a $e^{-u} \leqslant 1$. On en déduit que f est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne sur $[0, +\infty[$.
3. On pose $g(x) = f(x) - x = e^{-\frac{x}{2}} - x$ qui est définie, dérivable sur $[0, +\infty[$ avec $g'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} - 1 < 0$. Ainsi g est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Puisque $g(0) = 1$ et $g(1) = e^{-\frac{1}{2}} - 1 < 0$, par le corollaire du TVI, on en déduit qu'il existe un unique ℓ tel que $g(\ell) = 0$ et que $\ell \in [0,1]$.
Remarque : On peut aussi dire que g réalise une bijection (elle est continue et strictement croissante) de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim\limits_{+\infty} g, \lim\limits_{-\infty} g\right[= \mathbb{R}$. Ainsi 0 admet un unique antécédent par g, antécédent que l'on note ℓ. Puis $g(0) \geqslant 0$ et $g(1) \leqslant 0$ donne $\ell \in [0,1]$.

4. Puisque f est $\frac{1}{2}$ lipschitzienne sur $[0,+\infty[$, avec $x = u_n$ et $y = \ell$, qui sont bien dans $[0,+\infty[$, dans la définition d'une fonction lipschitzienne, on a
$$|f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$$
mais $u_{n+1} = f(u_n)$ et $\ell = f(\ell)$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|$.
Puis par récurrence on montre que $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$. C'est vrai au rang $n = 0$ puis si $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell|$ alors
$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell| = \frac{1}{2^{n+1}}|u_0 - \ell|$$
d'où l'hérédité.
Puisque $\frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on en déduit que $\frac{1}{2^n}|u_0 - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et par encadrement $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{}$ 0.
5. On a donc pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n}|u_0 - \ell| = \frac{1}{2^n}|0 - \ell| = \frac{\ell}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}$ car $0 \leqslant \ell \leqslant 1$. Ainsi si (condition suffisante) $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$ alors
$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3}$$
d'où u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
Enfin $\frac{1}{2^n} \leqslant 10^{-3} \iff 10^3 \leqslant 2^n \iff 3\ln(10) \leqslant n\ln 2 \iff \frac{3\ln(10)}{\ln(2)} \leqslant n$. Puisque $\frac{3\ln(10)}{\ln(2)} = 9,965\cdots$, on est sûr que si $n \geqslant 10$ alors u_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.
Remarque : Si on veut éviter le passage au ln, on peut aussi regarder les puissances de 2 qui sont
$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$$
On constate que la plus petite à dépasser $10^3 = 1000$ est obtenur pour 2^{10} (donc $n = 10$).

Exercice 3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n^2}$.

1. Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, montrer que sur $[0,+\infty[$ la fonction $|f'|$ admet un maximum dont on précisera la valeur. Que peut-on en déduire pour f ?
2. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ positive.
3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Solution :

1. La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$. Puisque , $f''(x) = 2\dfrac{3x^2-1}{(x^2+1)^3}$, on en déduit les variations de f' (faire un tableau) et ainsi $|f'|$ a un maximum qui vaut
$$\max_{[0,+\infty[}|f'| = \left|f'\left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)\right| = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(1+\dfrac{1}{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$$
En particulier, on en déduit que f est $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$–lipschitzienne sur $[0,+\infty[$ (via le TAF).

2. On a $f(x) = x \Longleftrightarrow x\left(1+x^2\right) = 1 \Longleftrightarrow x^3 + x - 1 = 0$. La fonction φ définie par $\varphi(x) = x^3 + x^2 - 1$ est continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ (somme de fonctions strictement croissantes), d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $\left[\varphi(0), \lim_{+\infty} \varphi(x)\right[= [-1, +\infty[$. En particulier, il existe un unique $\ell \in [0, +\infty[$ tel que $\varphi(\ell) = 0$.
3. Par récurrence immédiate, on a $u_n \geqslant 0$, soit $u_n \in [0, +\infty[$, on en déduit que, puisque u_n et ℓ sont $[0, +\infty[$
$$|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{8} |u_n - \ell|$$
et par récurrence immédiate que
$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)^n |u_0 - \ell| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \text{ car } \frac{3\sqrt{3}}{8} < 1$$
Conclusion
$$u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$$