Chapitre 3 : Fonctions usuelles

Exercice type 1

Justifier que $f : x \longmapsto x^3 + x + 1$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Justifier que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(x)$ pour $x = -1$ et $x = 1$.

Solution : La fonction f est **continue**, dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$. Ainsi f est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\lim_{-\infty} f, \lim_{+\infty} f\right[= \mathbb{R}$. Puisque $f'(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$, la bijection réciproque est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y)\right)}$$

Si $y = -1$, on cherche donc $f^{-1}(-1) = x \Longleftrightarrow -1 = f(x) = x^3 + x + 1$. On résout donc $x^3 + x + 2 = 0$ qui admet comme unique solution réelle $x = -1$. Ainsi $f^{-1}(-1) = -1$ et

$$\left(f^{-1}\right)'(-1) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{1}{4}$$

On procède de même en $x = 1$. On a $f^{-1}(1) = x \Longleftrightarrow x^3 + x + 1 = 1 \Longleftrightarrow x = 0$. Ainsi $\left(f^{-1}\right)'(-1) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$.

Exercice type 2

Résoudre $x - 1 = \sqrt{x+2}$.

Solution : Avant tout le problème ne se pose que sur $[-2, +\infty[$, domaine sur lequel l'égalité est définie. Pour l'égalité, on est tenté de passer au carré. Mais deux nombres peuvent avoir même carré sans être égaux (c'est le cas de 1 et -1). Or ici $\sqrt{x+2}$ est positif donc

$$\begin{aligned} x - 1 = \sqrt{x+2} &\Longleftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 = x + 2 \\ \text{et } x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x - 1 = 0 \\ \text{et } x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13} \geqslant 1 \text{ ou } x = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13} \leqslant 1 \\ \text{et } x - 1 \geqslant 0 \end{cases} \end{aligned}$$

La solution est donc $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$.

Remarque : Pour résoudre l'inégalité $x - 1 \leqslant \sqrt{x+2}$, le plus simple est d'introduire la fonction f définie par $f(x) = x - 1 - \sqrt{x+2}$. Alors f est définie, continue sur $[-2, +\infty[$, elle ne s'annule que si $x = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires elle garde un signe constant sur $\left[-2, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right]$ et sur $\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, +\infty\right[$ (sinon elle s'annule une autre fois). Il reste à déterminer ce signe en regardant la valeur en -2 et en 7, car $f(-2) = -3 \leqslant 0$ et $f(7) = 3 \geqslant 0$. Ainsi

$$x - 1 \leqslant \sqrt{x+2} \Longleftrightarrow x \in \left[-2, \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}\right]$$

Exercice type 3

Soit f définie sur $D = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}$ par $f(x) = \tan(x) \exp\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)$. Calculer les limites de f en $-\frac{\pi}{2}^+, 0^-, 0^+$ et $\frac{\pi}{2}^-$.

Solution : Avant tout, la fonction est bien définie sur D car tan est définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\sin x = 0$ si et seulement si $x = 0 + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

① Limite en $-\frac{\pi}{2}^+$. On sait que $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$, et par continuité en $x = -\frac{\pi}{2}$ de $g : x \longmapsto \exp\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ on a $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \exp\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \exp\left(\frac{1}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}\right) = e^{-1} > 0$, ainsi $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = -\infty$.

② Limite en $\frac{\pi}{2}^-$. Le même genre de raisonnement donne, $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$ et $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \exp\left(\frac{1}{\sin x}\right) = e > 0$ d'où $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = +\infty$.

③ Limite en 0^-. On a $\lim_{x\to 0^-} \tan x = \tan 0 = 0^-$ et $\lim_{x\to 0^-} X = \frac{1}{\sin x} = -\infty$. Puisque $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$, on en déduit que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0^-$.

④ Limite en 0^+. Cette fois ci, on a $\lim_{x\to 0^+} \tan x = \tan 0 = 0^+$ et $\lim_{x\to 0^-} X = \frac{1}{\sin x} = +\infty$. Il y a une forme indéterminée. Mais

$$\tan(x)\exp\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{\sin x}{\cos x}\exp\left(\frac{1}{\sin x}\right) = \frac{1}{\cos x}\frac{e^X}{X} \text{ où } X = \frac{1}{\sin x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$$

Puisque $\lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ (croissances comparées) et $\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos 0 = 1$ par continuité, on a $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
Si on pose $f(0) = 0$, alors f n'est pas continue en $x = 0$ mais elle l'est à gauche en $x = 0$.

Exercice type 4

Calculer, pour $n \geqslant 1$, $v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$, en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

Solution : On a

$$\begin{array}{rcll} v_n & = & \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) & \\ & = & \ln(2) - \ln(1) & \leftarrow \text{indice } k=1 \\ & + & \ln(3) - \ln(2) & \leftarrow \text{indice } k=2 \\ & & \vdots & \\ & + & \ln(n) - \ln(n-1) & \leftarrow \text{indice } k=n-1 \\ & + & \ln(n+1) - \ln(n) & \leftarrow \text{indice } k=n \\ & = & \ln(n+1) & \end{array}$$

Ainsi $v_n = \ln(n+1)$. On sait que pour $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant x$, on applique cette inégalité avec $x = \frac{1}{k}$ pour obtenir

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\},\ \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{k}$$

On peut sommer ces inégalités pour avoir

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = u_n$$

Par passage à la limite, on obtient

$$\left.\begin{array}{c} v_n \leqslant u_n \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

Exercice 1

Résoudre l'équation

$$4\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x - 4 = 0$$

Solution : On a

$$4\operatorname{ch} x + 3\operatorname{sh} x - 4 = 2\left(e^x + e^{-x}\right) + \frac{3}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) - 4$$

En posant $Z = e^x$, on obtient l'équation

$$2\left(Z + \frac{1}{Z}\right) + \frac{3}{2}\left(Z - \frac{1}{Z}\right) - 4 = \frac{1}{2Z}\left(7Z^2 - 8Z + 1\right) = 0 \Longleftrightarrow Z = 1 \text{ ou } Z = \frac{1}{7}$$

ce qui donne deux solutions $x = 0$ ou $x = -\ln(7)$.

Exercice type 5

Soient a et b deux réels, montrer que

$$\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\right)$$

Solution : On a, en développant

$$\begin{aligned}\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) &= \frac{1}{4}\left(e^a + e^{-a}\right)\left(e^b + e^{-b}\right) = \frac{1}{4}\left(e^{a+b} + e^{-(a+b)} + e^{a-b} + e^{-(a-b)}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\right)\end{aligned}$$

Exercice type 6

Résoudre $\arcsin(x) = \arccos(2x)$.

Solution : La fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ alors que $x \longmapsto \arccos 2x$ est définie sur $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. On travaille sur I. On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. Soit x une solution

$$\begin{aligned} & \arcsin(x) = \arccos(2x) \\ \Longrightarrow\ & \sin\arcsin x = \sin\arccos 2x \\ \Longrightarrow\ & x = \sqrt{1-4x^2} \\ \Longleftrightarrow\ & \left\{\begin{array}{c} x^2 = 1-4x^2 \\ \text{et } x \geqslant 0 \end{array}\right. \quad \text{car } \sqrt{1-4x^2} \geqslant 0 \\ \Longleftrightarrow\ & x = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ qui est bien dans } I \end{aligned}$$

Synthèse (Réciproque) : Pour $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$, on vient de montrer que $\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$ et $\beta = \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ ont même sinus. Mais deux nombres ayant même sinus ne sont nécessairement égaux. Or

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \in [0,1] \Longrightarrow \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \frac{2}{\sqrt{5}} \in [0,1] \Longrightarrow \beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi α et β sont dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et ont même sinus, ils sont donc égaux.

Conclusion, l'équation $\arcsin(x) = \arccos(2x)$ admet une unique solution $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Exercice 2

Résoudre $\arctan(x) + \arctan(x^3) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Solution : Tout d'abord, les fonctions $x \longmapsto \arctan x$ et $x \longmapsto \arctan x^3$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de restriction du domaine d'étude de l'équation. On travaille par analyse synthèse.
Analyse. Soit x une solution alors

$$\tan\left(\arctan(x) + \arctan\left(x^3\right)\right) = \tan\frac{3\pi}{4}$$

Avec $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$, on obtient

$$\frac{x^3 + x}{1 - x^4} = -1 \iff \frac{x\left(1+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)} = \frac{x}{1-x^2} = -1 \iff \left(x^2 - x - 1\right) = 0$$

On en déduit que

$$x = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ (le nombre d'or) ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Mais attention, rien ne dit que ces deux réels sont solutions. Ce que l'on a prouvé c'est que si $x = \phi$, ou si $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ alors $\arctan(x) + \arctan\left(x^3\right)$ et $\frac{3\pi}{4}$ ont même tangente !
Synthèse (Réciproque) : Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan(x) + \arctan\left(x^3\right)$. Cette fonction est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}$ (somme, composée de fonctions strictement croissantes et continues, ou bien f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{3x^2}{1+x^6} \geqslant 0$). Puisque $\arctan x \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\frac{\pi}{2}$ et $\arctan x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$, on a

$$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\pi$$
$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi$$

Ainsi f réalise une bijection croissante de $\mathbb{R}$ sur $]-\pi, \pi[$. L'équation $f(x) = \frac{3\pi}{4}$ admet donc une unique solution, cette solution est positive car $f(0) = 0$.
Conclusion $x = \phi$ est l'unique solution.

Exercice 3

Simplifier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$ en étudiant sa dérivée.

Solution : Avant tout il s'agit de déterminer le domaine de définition de f. Le terme $f(x)$ est défini si et seulement si

$$-1 \leqslant \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1 \iff -\left(1+x^2\right) \leqslant 2x \leqslant 1 + x^2 \text{ car } 1 + x^2 \geqslant 0$$

soit

$$\left\{\begin{array}{l} 1 + x^2 - 2x = (x-1)^2 \geqslant 0 \\ \text{et } 1 + x^2 + 2x = (x+1)^2 \geqslant 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $D_f = \mathbb{R}$. Pour la dérivabilité, on sait que $\arcsin u(x)$ est dérivable en tout point où $u(x) \neq \pm 1$ Ainsi

$$f \text{ est dérivable en tout point de } \mathbb{R} \text{ tel que } -1 < \frac{2x}{1+x^2} < 1$$

ce qui exclus les cas d'égalité dans $(x-1)^2 \geqslant 0$ et $(x+1)^2 \geqslant 0$.
Conclusion : f est dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour conclure, f est impaire (ce qui aurait permis de réduire

l'étude, mais pédagogie oblige $\cdots$). Cela dit, on étudie f sur $[0,+\infty[$ et on dérive sur $[0,1[$ et sur $]1,+\infty[$. La dérivée est alors égale à

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\times\left(1+x^2\right)-2x\times(2x)}{\left(1+x^2\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}} \\ &= \frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\times\frac{1}{\sqrt{\dfrac{\left(1+x^2\right)^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}}=\frac{2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2}\times\frac{1+x^2}{\sqrt{x^4-2x^2+1}} \\ &= \frac{2}{1+x^2}\times\frac{1-x^2}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^2}}=\frac{2}{1+x^2}\times\frac{1-x^2}{\left|1-x^2\right|} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\forall x\in[0,1[\,,\ f'(x)=\frac{2}{1+x^2}\text{ et }\forall x\in]1,+\infty[\,,\ f'(x)=-\frac{2}{1+x^2}$$

On en déduit qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que (**bien remarquer qu'il s'agit d'intervalles contenant 1**)

$$\forall x\in[0,1]\,,\ f(x)=2\arctan(x)+C_1\text{ et }\forall x\in[1,+\infty[\,,\ f(x)=-2\arctan(x)+C_2$$

(On a utilisé le résultat suivant : Si f et g sont dérivables sur I, sauf éventuellement aux bords avec $f'=g'$, alors $f=g+Cste$).

pour calculer C_1 et C_2, on utilise la valeur de f en $x=1$ qui vaut $f(1)=\arcsin 1=\frac{\pi}{2}$ d'où

$$\begin{aligned} f(1) &= \frac{\pi}{2}=2\arctan 1+C_1\Longrightarrow C_1=0 \\ f(1) &= \frac{\pi}{2}=-2\arctan 1+C_2\Longrightarrow C_2=\pi \end{aligned}$$

Conclusion : Pour $x\in[0,1[\,,\ f(x)=2\arctan(x)$ et par imparité, si $x\in]-1,0]\,,\ f(x)=-f(-x)=-2\arctan(-x)=2\arctan x$, d'om

$$|x|\leqslant 1\Longrightarrow f(x)=2\arctan x$$

Pour $x\geqslant 1$, $f(x)=\pi-2\arctan x$, par imparité, si $x\leqslant -1$, $f(x)=-f(-x)=-(\pi-2\arctan(-x))=-\pi-2\arctan x$

$$\begin{aligned} x &\geqslant 1\Longrightarrow f(x)=\pi-2\arctan x \\ x &\leqslant -1\Longrightarrow f(x)=-\pi-2\arctan x \end{aligned}$$

Exercice 4

Etudier les variations et les limites au bord de la fonction f définie par $f(x)=\left(\dfrac{x-1}{x}\right)^x$.

Solution : Avant tout, on exprime f autrement. On a $f(x)=\exp\left(x\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)\right)$. Ainsi $f(x)$ est défini si et seulement si $\dfrac{x-1}{x}>0\iff x(x-1)>0$. On en déduit que $Df=]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$ et sur D_f, la fonction est continue, dérivable en tant que somme, quotient, composée de fonctions continues et dérivables.

Limites au bords :

En 1^+, on a $\ln\dfrac{x-1}{x}=\ln(x-1)-\ln x\xrightarrow[x\to1^+]{}-\infty$ (car $x-1$ tend vers 0^+) d'où $x\ln\dfrac{x-1}{x}\xrightarrow[x\to1^+]{}-\infty$.

En 0^-, on a $\ln\dfrac{x-1}{x}=\ln(1-x)-\ln(-x)\xrightarrow[x\to0^-]{}+\infty$. On a donc une forme indéterminée. Mais on sait que $u\ln u\xrightarrow[u\to0^+]{}0$, donc en posant $u=-x$, on en déduit que

$$-x\ln(-x)\xrightarrow[x\to0^-]{}0\text{ et ainsi }x\ln\frac{x-1}{x}\xrightarrow[x\to0^-]{}0$$

$$\begin{aligned} f(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0 \text{ car } \lim_{X\to -\infty} e^X &= 0 \\ f(x) \xrightarrow[x\to 0^-]{} 1 \text{ car } e^X \text{ est continue en } X &= 0 \end{aligned}$$

En $+\infty$ c'est plus compliqué. En effet, on a $\ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right) = \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$ et $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. On pose alors $u = -\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^-$, on obtient

$$x\ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = -\frac{\ln(1+u)}{u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1 \Longrightarrow f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{-1}$$

De même en $-\infty$ où $u = -\dfrac{1}{x}$ tend vers 0^+, on obtient ainsi $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} e^{-1}$. La courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale.

Variations : f est dérivable sur D_f et (on écrit que $f(x) = \exp\left(x\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right)$

$$\forall x\in D_f,\ f'(x) = \left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) + x\times \underbrace{\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x-1}{x}}}_{\ln\left(\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)'}\right) f(x) = \left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}\right) f(x)$$

dont le signe est celui de $g(x) = \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)+\dfrac{1}{x-1}$. La fonction g est dérivable sur D_f et (on réutilise le calcul précédent)

$$\forall x\in D_f,\ g'(x) = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{x(x-1)^2}$$

On en déduit que g est décroissante sur $]-\infty,0[$, croissante sur $]1,+\infty[$. Mais

$$\begin{aligned} g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln 1 &= 0 \Longrightarrow g(x)\geqslant 0 \text{ sur }]1,+\infty[\\ g(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} \ln 1 &= 0 \Longrightarrow g(x)\geqslant 0 \text{ sur }]-\infty,0[\end{aligned}$$

Conclusion : $f'(x)\geqslant 0$, la fonction f est croissante sur chaque intervalle $]-\infty,0[$ et $]1,+\infty[$ (mais pas sur $\mathbb{R}$). Voici son graphe :