Chapitre 4 : Calcul de primitives

Exercice type 1

Calculer les primitives de ① $\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$, ② $e^{-x}\sin(2x)$, ③$\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ et ④ $\dfrac{1}{x^2+2x+3}$.

Solution : Pour ①, $f(x)=\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$ est définie et continue sur $]0,+\infty[$, f admet des primitives sur cet intervalle. On a $\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}=x^{-4}+x^{-\frac{3}{2}}$, ainsi $\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{1}{-3}x^{-3}+\frac{1}{-\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}+C=-\frac{1}{3x^3}-\frac{2}{\sqrt{x}}+C$ où $C\in\mathbb{R}$.

Pour ②, $f(x)=e^{-x}\sin(2x)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ donc f admet des primitives. On a $f(x)=\operatorname{Im}\left(e^{-x}e^{2ix}\right)=\operatorname{Im}\left(e^{(-1+2i)x}\right)$, or une primitive de $e^{(-1+2i)x}$ est $\dfrac{1}{-1+2i}e^{(-1+2i)x}=\dfrac{-1-2i}{1+4}e^{(-1+2i)x}=\dfrac{-1-2i}{5}e^{-x}(\cos 2x+i\sin 2x)$. Ainsi $\displaystyle\int f(x)\,dx=\frac{e^{-x}}{5}(-\sin 2x-2\cos 2x)+C$ où $C\in\mathbb{R}$.

Pour ③, $f(x)=\dfrac{1}{x^2-5x+6}=\dfrac{1}{(x-3)(x-2)}$ est définie, continue sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2,3\}$. Elle admet des primitives sur tout intervalle I inclus dans D_f. On a

$$\frac{a}{x-2}+\frac{b}{x-3}=\frac{(a+b)x-3a-2b}{(x-2)(x-3)}$$

En choisissant $\begin{cases}a+b=0\\3a+2b=1\end{cases}\iff a=1$ et $b=-1$, on a

$$\begin{aligned}\int f(x)\,dx &= \int\left(\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-3}\right)dx=\ln|x-2|-\ln|x-3|+C=\ln\left|\frac{x-2}{x-3}\right|+C \text{ où } C\in\mathbb{R}\\ \text{valable sur } I &\subset \mathbb{R}\setminus\{2,3\}\end{aligned}$$

Pour ④, on a $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, ainsi $f(x)=x^2+2x+3$ est défini et continue sur $\mathbb{R}$ donc y admet des primitives. On a $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx$. Or $\displaystyle\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+C$ où $C\in\mathbb{R}$, donc $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C$ où $C\in\mathbb{R}$.

Remarque : On peut aussi écrire que $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}dx$, et on reconnaît la forme $\dfrac{u'}{u^2+1}$.

Exercice type 2

Calculer $\displaystyle\int\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}dx$ (trouver a,b,c réels tels que $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$).

Solution : Soit $f(x)=\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}$, alors f est définie et continue sur $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Ainsi f admet des primitives sur tout intervalle $I\subset D_f$. On cherche a,b,c réels tels que $\dfrac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}$.

Si on réduit au même dénominateur, on obtient $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{bx+c}{x^2+1}=\dfrac{(a+b)x^2+(b+c)x+(a+c)}{(x+1)(x^2+1)}$. On résout donc $\begin{cases}a+b=1\\b+c=0\\a+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}-2c=1\\b=-c\\a=-c\end{cases}$. Ainsi

$$\frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}\right)$$

d'où $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx$. Mais

$$\int \frac{dx}{x+1} = \ln|x+1| + C,\ \int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+C \text{ et } \int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x + C$$

ainsi

$$\frac{1}{2}\int\left(\frac{x-1}{x^2+1}+\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{1}{4}\ln\left(1+x^2\right)+\frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{2}\arctan x + C \text{ où } C\in\mathbb{R}$$

Exercice type 3

Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{t}{\ln t}dt$, donner le domaine de définition D_f de F.

Solution : Soit $f(t) = \dfrac{t}{\ln t}$, **définie et continue** sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, $F(x)$ est définie si et seulement si l'intervalle d'intégration $[x,2x]$ est inclus dans D_f. Une première condition est $x>0$. Il y a alors deux cas :
① $x>1$ et ainsi $2x>1$ d'où $[x,2x]\subset]1,+\infty[$.
② $0<x<1$ et $2x<1$, donc $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ et ainsi $[x,2x]\subset]0,1[$.
Conclusion $D_f = \left]0,\frac{1}{2}\right[\cup]1,+\infty[$.

Exercice type 4

Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan t}{t}dt$, quel est le domaine de définition de F ? Calculer $F'(x)$ et en déduire F.

Solution : Posons $f(t) = \dfrac{\arctan t}{t}$, la fonction f est définie, continue sur $\mathbb{R}^*$ donc intégrable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$. Or l'intervalle d'intégration est, selon x, soit $\left[x,\dfrac{1}{x}\right]$, soit $\left[\dfrac{1}{x},x\right]$. Onrésume cela par $\left[x,\dfrac{1}{x}\right]\cup\left[\dfrac{1}{x},x\right].\subset\mathbb{R}^*$. On en déduit que F est définie sur $\mathbb{R}^*$. Soient G et H des primitives de f sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ respectivement (par exemple $G(x) = \int_1^x f(t)\,dt$ et $H(x) = \int_{-1}^x f(t)\,dt$). Les fonctions G et H sont dérivables sur $]0,+\infty[$ et $]-\infty,0[$ resopectivement, et de dérivées égales à $f(x)$. De plus, si $x>0$, on a $F(x) = G\left(\dfrac{1}{x}\right)-G(x)$ et si $x<0$, $F(x) = H\left(\dfrac{1}{x}\right)-H(x)$. On en déduit que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions dérivables) et

$$\text{Si } x>0,\ F'(x) = -\frac{1}{x^2}G'\left(\frac{1}{x}\right)-G'(x) = -\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)$$

$$\text{Si } x<0,\ F'(x) = -\frac{1}{x^2}H'\left(\frac{1}{x}\right)-H'(x) = -\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right)-f(x)$$

Donc $\forall x\neq 0$,

$$F'(x) = -\frac{1}{x^2}\times\frac{\arctan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\frac{\arctan x}{x} = -\frac{\arctan\frac{1}{x}+\arctan x}{x}$$

D'où

$$\text{Si } x>0,\ F'(x) = -\frac{\pi}{2x} \text{ et si } x<0,\ F'(x) = \frac{\pi}{2x} \text{ car } \arctan\frac{1}{x}+\arctan x = \mathit{signe}(x)\times\frac{\pi}{2}$$

Puisque $F(1)=0$ et $F(-1)=0$, on obtient

$$\text{Si } x>0,\ F(x) = \int_1^x F'(x)\,dx = -\frac{\pi}{2}\ln x - F(1) = -\frac{\pi}{2}\ln x$$

$$\text{Si } x<0,\ F(x)=\int_{-1}^{x}F'(x)\,dx=\frac{\pi}{2}\ln|x|-F(-1)=\frac{\pi}{2}\ln|x|$$

Exercice 1

Soit $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$ et F définie par $F(x)=\displaystyle\int_x^{2x}f(t)dt$. Justifier que F est définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que F est impaire. A l'aide du changement de variable $u=\dfrac{1}{t}$, établir, pour $x\neq 0$, une relation entre $F(x)$ et $F\left(\dfrac{1}{2x}\right)$. En déduire la limite de F en $+\infty$. Calculer $F'(x)$ pour $x\in\mathbb{R}$, en déduire les variations de F sur $[0,+\infty[$.

Solution : On commence par justifier que F est définie et continue sur $\mathbb{R}$. La fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, soit Φ une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors, pour $x\in\mathbb{R}$, on a $F(x)=\Phi(2x)-\Phi(x)$. Ainsi F est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
Pour étudier la parité, on a $F(-x)=\displaystyle\int_{-x}^{-2x}f(t)dt$, on pose alors $u=-t$ (changement $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc sur l'intervalle d'intégration, cet intervalle est $[x,2x]$ si $x>0$, et $[2x,x]$ si $x<0$, on peut écrire qu'il vaut $I=[x,2x]\cup[2x,x]$). pour avoir $F(-x)=\displaystyle\int_1^{2x}f(-u)\times(-du)$. Puisque f est paire, on a $F(-x)=-F(x)$. Ainsi F est impaire.
On pose ensuite $u=\dfrac{1}{t}$, changement de variable $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
On a alors $t=\dfrac{1}{u}\Longrightarrow dt=-\dfrac{du}{u^2}\Longrightarrow \dfrac{dt}{\sqrt{1+t^4}}=-\dfrac{du}{u^2\sqrt{1+\dfrac{1}{u^4}}}=-\dfrac{du}{\sqrt{1+u^4}}$. On détermine les nouvelles bornes. Si $t=x$ alors $u=\dfrac{1}{x}$, si $t=2x$, alors $u=\dfrac{1}{2x}$. On a donc

$$F(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{2x}}-\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}=\int_{\frac{1}{2x}}^{\frac{1}{x}}\frac{du}{\sqrt{1+u^4}}=F\left(\frac{1}{2x}\right)$$

Puisque $F(u)\xrightarrow[u\to 0]{}F(0)=0$ (c'est la continuité de F en $u=0$) et que $u=\dfrac{1}{2x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$, on en déduit que $F\left(\dfrac{1}{2x}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ (on utilise la composition des limites). Ainsi

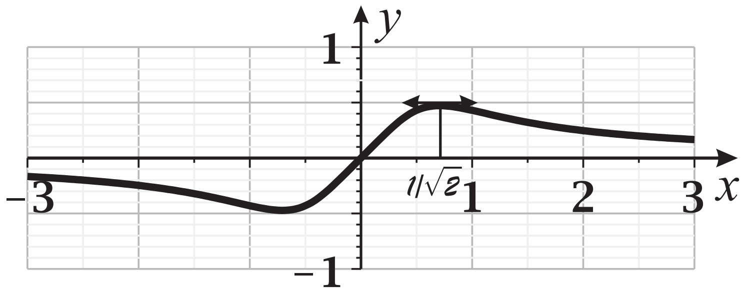
$$F(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Pour finir, on sait que $F(x)=\Phi(2x)-\Phi(x)$ avec Φ dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\Phi'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$. Ainsi, F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}
F'(x)&=2\Phi'(2x)-\Phi'(x)=\frac{2}{\sqrt{1+16x^4}}-\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}=\frac{2\sqrt{1+x^4}-\sqrt{1+16x^4}}{\sqrt{1+x^4}\sqrt{1+16x^4}}\\
&=\frac{4\left(1+x^4\right)-\left(1+16x^4\right)}{\sqrt{1+x^4}\sqrt{1+16x^4}\left(\sqrt{1+x^4}+\sqrt{1+16x^4}\right)}\ \text{(retenir } \sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\text{)}\\
&=\frac{3-12x^4}{D(x)}\ \text{où } D(x)>0 \text{ sur } \mathbb{R}\\
&=3\frac{1-4x^4}{D(x)}=3\left(1-2x^2\right)\frac{1+2x^2}{D(x)}\ \text{est du signe de } 1-2x^2
\end{aligned}$$

On en déduit que f est croissante sur $\left[0,\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ puis décroissante. Ainsi F a un maximum en $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Voici le graphe sur $\mathbb{R}$:



Exercice type 5

On définit, pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$. Montrer que pour $n \geqslant 1$, $I_n = \dfrac{2n}{2n+3}I_{n-1}$.

Solution : On intégre I_n par parties (en intégrant $\sqrt{1-x}$ car cette fonction n'est pas dérivable en 1, on n'a donc pas le choix pour l'IPP).
Si $n \geqslant 1$,

$$\begin{array}{cc} f'(x) = \sqrt{1-x} & f(x) = -\dfrac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}} \\ g(x) = x^n & g'(x) = nx^{n-1} \end{array}, \ f \text{ et } g \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1]$$

d'où

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^1 x^n\sqrt{(1-x)}\,dx = \left[x^n \times \left(-\frac{2}{3}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{2}{3}nx^{n-1}(1-x)^{\frac{3}{2}}\right)dx \\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)\sqrt{1-x}\,dx = \frac{2n}{3}\left[\int_0^1 x^{n-1}\sqrt{1-x}dx - \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\,dx\right] = \frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n) \end{aligned}$$

Ainsi

$$I_n = \frac{2n}{3}(I_{n-1}-I_n) \Longleftrightarrow I_n = \frac{2n}{2n+3}I_{n-1} \text{ pour } n \geqslant 1.$$

Exercice type 6

Montrer que $\forall k \in \mathbb{N},\ k \geqslant 1,\ \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\ dt = \frac{1}{k^2}$.

Solution : On intègre par parties. On fait deux intégrations par parties en dérivant le polynôme.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\cos(kt)\ dt &= \left[\frac{1}{k}\left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)\sin(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)\ dt \\ &= -\frac{1}{k}\int_0^\pi\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\sin(kt)\ dt \text{ car } \sin k\pi = 0 \\ &= -\left(\left[-\frac{1}{k^2}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos(kt)\right]_0^\pi + \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos(kt)\ dt\right) \\ &= \left[\frac{1}{k^2}\left(\frac{t}{\pi}-1\right)\cos(kt)\right]_0^\pi - \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\pi\cos(kt)\ dt \\ &= \frac{1}{k^2} - \frac{1}{\pi k^2}\int_0^\pi \cos(kt)\ dt = \frac{1}{k^2} \end{aligned}$$

Ne pas oublier que lors des deux IPP, les fonctions sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ (Il s'agit de polynômes et des fonctions $t \longmapsto \sin(kt)$, $t \longmapsto \cos(kt)$).

Exercice type 7

Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, donner une relation de récurrence pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que $(n+1) I_{n+1} I_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour $n \geqslant 0$.

Solution : La définition de I_n est assurée par la continuité de $x \mapsto \sin^n x$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Pour $n \geqslant 2$, on intègre ensuite par parties en écrivant que $\sin^n x = \sin x \times \sin^{n-1} x$. On obtient alors

$$\begin{array}{ll} u'(x) = \sin x & u(x) = -\cos x \\ v(x) = \sin^{n-1} x & v'(x) = (n-1)\cos x \sin^{n-2}(x) \end{array} \quad u \text{ et } v \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \times \sin^{n-1} x dx = \left[-\cos x \sin^{n-1} x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\sin^2 x\right)\sin^{n-2} x dx \\ &= (n-1)\left(I_{n-2} - I_n\right) \end{aligned}$$

soit, en exprimant I_n en fonction de I_{n-2} et après multiplication par I_{n-1}

$$n I_n I_{n-1} = (n-1) I_{n-1} I_{n-2}$$

ce qui signifie que la suite définie par $u_n = (n+1) I_{n+1} I_n$ est constante égale à son premier terme $I_1 I_0$. Or $I_0 = \frac{\pi}{2}$, $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx = 1$ d'où le résultat.

Exercice type 8

Calculer $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x} dx$ en posant $u = \sqrt{\frac{1+x}{x}}$, quel est le signe du résultat obtenu, pourquoi ?

Solution : Le changement de variable $u = \sqrt{\dfrac{1+x}{x}}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{8}\right]$. Pour calculer du c'est assez compliqué, on écrit que $u^2 = \dfrac{1+x}{x} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{u^2-1}$ et

$$\begin{array}{lll} dx = \dfrac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2} du & & \\ x = \frac{1}{3} & \Longrightarrow & u = 2 \\ x = \frac{1}{8} & \Longrightarrow & u = 3 \end{array}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{8}} \frac{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}{x} dx &= \int_2^3 \frac{-2u}{\left(u^2-1\right)^2} \times \frac{1+u}{\frac{1}{u^2-1}} du = -2\int_2^3 \frac{u}{u-1} du \\ &= -2\int_2^3 \frac{u-1+1}{u-1} du = -2\left[u + \ln\left(|u-1|\right)\right]_2^3 \\ &= -2 - 2\ln(2) < 0 \qquad \text{car } \frac{1}{3} > \frac{1}{8} \text{ et par positivité de la fonction intégrée.} \end{aligned}$$

Exercice 2

Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$ en posant $x = \sin t$, retrouver ce résultat par une interprétation géométrique en termes d'aires.

Solution : L'intégrale I existe car la fonction intégrée est bien continue sur $[0,1]$. Dans cet exemple, on réalise le changement de variable dans l'autre sens. Le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $\cdots$, sur quel intervalle ? On a

$$\begin{array}{lll} dx = \cos t dt & & \\ \text{si } x = 0 & \text{on choisit} & t = 0 \\ \text{si } x = 1 & \text{on choisit} & t = \frac{\pi}{2} \end{array}$$

On a donc $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et le changement de variable est $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle. De plus

$$\sqrt{1-x^2}dx = \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = |\cos t| \cos t dt = \cos^2 t dt$$

car sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ on a $\cos t \geqslant 0$. D'où $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$.
On peut retrouver ce résultat géométriquement, en effet la courbe $y = \sqrt{1-x^2}$ est un arc de cercle ($y = \sqrt{1-x^2} \iff \begin{cases} y^2 = 1-x^2 \\ y \geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ y \geqslant 0 \end{cases}$) L'intégrale demandée est donc l'aire (algébrique) d'un quart de cercle, la règle des signes donne la valeur $\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable indiqué :

$$(1) \quad \int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}, \qquad u = \sqrt{1+x} \qquad\qquad (2) \quad \int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}}, \qquad u = 1+\sqrt{x}$$

$$(3) \quad \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx, \quad u = \sqrt{e^x+1} \qquad\qquad (4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx, \quad u = \sqrt{\cos x}$$

Solution : (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1+x}} = 2\int_1^{\sqrt{2}} \left(u^2-1\right) du = \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{2}.$
(2) on a $u = 1+\sqrt{x}$ pas $\mathcal{C}^1$ donc $x = (u-1)^2 \Longrightarrow dx = 2(u-1)$ et

$$\int_0^1 \frac{xdx}{1+\sqrt{x}} = 2\int_1^2 \frac{(u-1)^3}{u} du = \frac{5}{3} - 2\ln 2$$

(3) On pose $u = \sqrt{e^x+1}$, soit $e^x = u^2-1 \Longrightarrow e^x dx = 2udu$ et $\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}} = \dfrac{2u\left(u^2-1\right)}{u}du$, d'où

$$\int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx = 2\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \left(u^2-1\right) du = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

(4) On a $\cos x = u^2 \Longrightarrow -\sin x dx = 2udu$ et $\sin^2 x = 1-\cos^2 x = 1-u^4$ d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx = 2\int_1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(u^4-1\right) du = \frac{8}{5} - \frac{19}{20}\sqrt{2}$$

Exercice 4

Soit $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$, à l'aide d'un changement de variable astucieux, calculer I.

Solution : L'intégrale I existe car $t\longmapsto\dfrac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}$ est bien défini, continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. En effet, sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{\sin x}\geqslant 0$ et $\sqrt{\cos x}\geqslant 0$, ainsi

$$\text{Si } \sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}=0 \text{ alors } \begin{cases}\sqrt{\sin x}=0\\ \sqrt{\cos x}=0\end{cases} \text{ d'où } \left(\sqrt{\cos x}\right)^4+\left(\sqrt{\sin x}\right)^4=0$$

mais $\left(\sqrt{\cos x}\right)^4+\left(\sqrt{\sin x}\right)^4=\cos^2 x+\sin^2 x=1$, absurde. Le dénominateur n'est donc jamais nul.
Dans $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$, on pose $u=\frac{\pi}{2}-x$ qui est bien $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, on obtient

$$I=-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx$$

d'où

$$2I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}dx=\frac{\pi}{2}\Longrightarrow I=\frac{\pi}{4}$$

Exercice 5

Calculer $\displaystyle\int_1^{\varphi}\frac{(x^2+1)\sqrt{3x^2-x^4-1}}{x^3}dx$ en posant $u=x-\dfrac{1}{x}$ où $\varphi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (on a $\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x+-1\right)=x^4-3x^2+1$)

Solution : On vérifie que l'intégrale existe (utiliser la factorisation donnée) puis on a $du=1+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2}$, or

$$\begin{aligned}\frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{3x^2-x^4-1}}{x^3}dx &= \frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{-x^2+3-\frac{1}{x^2}}}{x^2}dx\\ -x^2+3-\frac{1}{x^2} &= 1-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\end{aligned}$$

donc

$$\int_1^{\varphi}\frac{\left(x^2+1\right)\sqrt{3x^2-x^4-1}}{x^3}dx=\int_0^1\sqrt{1-u^2}du$$

Pour calculer la dernière intégrale, le plus simple est d'identifier la courbe $y=\sqrt{1-x^2}\Longleftrightarrow\begin{cases}y^2=1-x^2\\ \text{et } y\geqslant 0\end{cases}\Longleftrightarrow$ $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ \text{et } y\geqslant 0\end{cases}$. Il s'agit donc du demi-cercle trigonométrique. Comme $x\in[0,1]$, la dernière intégrale correspond à l'aire d'un quart de cercle de rayon 1, soit $\frac{\pi}{4}$.

Exercice type 9

Calculer $I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$ en posant $x=\cos\varphi$.

Solution : L'intégrale existe car la fonction $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ est bien définie et continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$. Le changement de variable donné, $x = \cos\varphi$ donne $dx = -\sin\varphi d\varphi$, on choisit pour $x = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$. Ainsi $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $x = \cos\varphi$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$. On obtient alors

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} \sin\varphi d\varphi.$$

On simplifie directement $\dfrac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} = \dfrac{(1+\cos\varphi)^2}{1-\cos^2\varphi} = \dfrac{(1+\cos\varphi)^2}{\sin^2\varphi}$. Puisque $\varphi \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $\sin\varphi > 0$ et ainsi

$$-\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} \sin\varphi = -(1+\cos\varphi) \Longrightarrow I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\varphi)\, d\varphi = [\varphi + \sin\varphi]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} + 1$$

Autre méthode : Avec $1+\cos\varphi = 2\cos^2\frac{\varphi}{2}$ et $1-\cos\varphi = 2\sin^2\frac{\varphi}{2}$, on obtient (puisque $\dfrac{\varphi}{2} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan\frac{\varphi}{2} > 0$)

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\varphi}{\tan\frac{\varphi}{2}} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{2\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\tan\frac{\varphi}{2}} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 2\cos^2\frac{\varphi}{2} d\varphi = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos\varphi)\, d\varphi = \cdots$$

Exercice 6

Calculer $\operatorname{sh}(\ln a)$, en déduire $\operatorname{sh}(\ln 2)$, $\operatorname{sh}(\ln 3)$. Calculer la dérivée de $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$. Enfin calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$ et $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}$ en posant $x = \operatorname{sh} t$.

Solution : Si $a > 0$, alors $\operatorname{sh}(\ln a) = \dfrac{1}{2}\left(e^{\ln a} - e^{-\ln a}\right) = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right) =$ ainsi $\operatorname{sh}(\ln 2) = \frac{3}{4}$, $\operatorname{sh}(\ln 3) = \frac{4}{3}$. Puis $f'(t) = \dfrac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$.Les deux intégrales existent car les fonctions intégrées sont continue sur l'intervalle d'intégration. On pose $x = \operatorname{sh} t$, a priori, on ne sait pas quel est l'intervalle d'intégration en t, mais puisque sh est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, cela importe peu $\cdots$ On a alors $dx = \operatorname{ch}(t)\, dt$, puis $\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+\operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t$ car $\operatorname{ch} t > 0$ sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\begin{aligned} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} &= \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{ch}(t)} dt = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} dt \\ \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} &= \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} dt \end{aligned}$$

Reste les bornes, mais on a le tableau suivant

t	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$x = \operatorname{sh}(t)$	0	$\ln 2$	$\ln 3$

On a donc

$$\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \int_0^{\ln 2} \frac{\operatorname{ch}(t)}{\operatorname{ch}^2(t)\operatorname{ch}(t)} dt = \int_0^{\ln 2} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2(t)} = \left[\frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}\right]_0^{\ln 2} = \frac{\operatorname{sh}(\ln 2)}{\operatorname{ch}(\ln 2)} = \frac{3}{5}$$

Car $\operatorname{ch}(\ln a) = \dfrac{a^2+1}{2a}$ d'où $\operatorname{ch}(\ln 2) = \dfrac{5}{4}$. Puis $\displaystyle\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} dt$. Mais, $\left(\dfrac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right)' = \dfrac{\operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t}{\operatorname{sh}^2 t} = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 t}$ si $t \neq 0$, d'où

$$\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}} = \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t} dt = \left[-\frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{sh} t}\right]_{\ln 2}^{\ln 3} = -\frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} - \left(-\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{4}}\right) = \frac{5}{12}$$

Géry Huvent