Chapitre 5 : Analyse asymptotique

Exercice type 1

Donner un équivalent de $e^{\sin(x)} - e$ en $\dfrac{\pi}{2}$.

Solution : On pose $x = \frac{\pi}{2} + h$, on a alors $h \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} 0$. On cherche donc un équivalent en 0 de

$$e^{\sin(\frac{\pi}{2}+h)} - e = e^{\cos(h)} - e = e\left(e^{\cos(h)-1} - 1\right)$$

Or $u = \cos(h) - 1 \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ donc, puisque $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$

$$e^{\cos(h)-1} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} \cos(h) - 1$$

De plus

$$\cos(h) - 1 \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{h^2}{2}$$

donc par transitivité,

$$e^{\cos(h)-1} - 1 \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{h^2}{2}$$

On multiplie par e, pour avoir

$$e\left(e^{\cos(h)-1} - 1\right) \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{eh^2}{2}$$

On revient à la variable initiale :

$$e^{\sin(x)} - e \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{e}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2$$

Exercice 1

Donner un équivalent de $\dfrac{\tan(\pi x)}{\sqrt{-8x^2+8x+2}-2}$ au voisinage de $x = \dfrac{1}{2}$.

Solution : On pose $x = \dfrac{1}{2} + h$, alors (pour mémoire $\tan\left(\frac{\pi}{2}+u\right) = -\operatorname{cotan} u \underset{u\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{u}$).

$$\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{-8x^2+8x+2}-2} \underset{x=\frac{1}{2}+h}{=} -\frac{1}{2}\frac{\operatorname{cotan}(\pi h)}{\sqrt{1-2h^2}-1} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}\frac{\frac{1}{\pi h}}{\frac{1}{2}\times(-2h^2)} = \frac{1}{2\pi h^3}$$

d'où

$$\frac{\tan(\pi x)}{\sqrt{-8x^2+8x+2}-2} \underset{x\to\frac{1}{2}}{\sim} \frac{1}{2\pi\left(x-\frac{1}{2}\right)^3}$$

Exercice 2

Soient a et b réels tels que $\dfrac{\ln^2(2-x)}{x^2+ax+b} \xrightarrow[x\to 1]{} 1$. Déterminer a et b.

Solution : On pose $x=1+h$ alors $f(x)=\dfrac{\ln^2(2-x)}{x^2+ax+b}=\dfrac{\ln^2(1-h)}{h^2+(a+2)h+(a+b+1)}$.

$$\begin{aligned}&\text{Si } a+b+1\neq 0 \text{ alors } f(1+h)\underset{h\to 0}{\sim}\frac{h^2}{a+b+1} \text{ tend vers } 0\\ &\text{Si } a+b+1=0 \text{ et } a+2\neq 0, \text{ on a } f(1+h)\underset{h\to 0}{\sim}\frac{h}{a+2} \text{ qui tend encore vers } 0\end{aligned}$$

On a donc $a=-2$ et $b=1$, et ainsi $f(1+h)\underset{h\to 0}{\sim}1$. Conclusion $f(x)=\dfrac{\ln^2(2-x)}{(x-1)^2}$.

Exercice type 2

Déterminer $\lim\limits_{x\to\pi}(2+\cos(x))^{\frac{1}{\tan^2 x}}$.

Solution : Attention, pas question de prendre un équivalent de chaque terme et d'élèver à la puissance ! On commence par écrire que

$$(2+\cos(x))^{\frac{1}{\tan^2 x}}=e^{\frac{\ln(2+\cos(x))}{\tan^2 x}}$$

Ici aussi, prendre un équivalent du terme dans l'exponentielle et passer à l'exponentielle s'apparente à un suicide taupinal. En revanche, on cherche la limite du terme $\mathrm{cotan}^2(x)\ln(2+\cos(x))$ à l'aide des équivalents, puis on fait une **composition de limites**.

On se ramène donc en 0 en posant $x=\pi+h$,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\tan^2 x}&\underset{x=\pi+h}{=}\frac{1}{\tan^2 h}\underset{h\to 0}{\sim}\frac{1}{h^2}\\ \ln(2+\cos(x))&\underset{x=\pi+h}{=}\ln(1+1-\cos(h))\underset{h\to 0}{\sim}1-\cos(h)\underset{h\to 0}{\sim}\frac{h^2}{2}\\ \frac{\ln(2-\cos(h))}{\tan^2 h}&\underset{h\to 0}{\sim}\frac{1}{2}\end{aligned}$$

On en déduit que $\frac{\ln(2+\cos(x))}{\tan^2 x}\underset{x\to\pi}{\sim}\dfrac{1}{2}$ puis par continuité de l'exponentielle en $x=\frac{1}{2}$, on a

$$\lim_{x\to\pi}(2+\cos(x))^{\frac{1}{\tan^2 x}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$$

Exercice type 3

Donner le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\dfrac{\cos x}{1+\ln(1+x)}$.

Solution : On a $\cos x=1-\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ et $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)$ d'où

$$\frac{\cos x}{1+\ln(1+x)}=\frac{1-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}{1+x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)}$$

Or

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2+\underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right) \text{ avec } u=x-\frac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\xrightarrow[x\to 0]{}0$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x-\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)} &= 1-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)+\left(x-\frac{x^2}{2}\right)^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\
&= 1-x+\frac{3}{2}x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\frac{\cos x}{1+\ln(1+x)} &= \left(1-\frac{x^2}{2}\right)\times\left(1-x+\frac{3}{2}x^2\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\
&= 1-x+x^2+\underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)
\end{aligned}$$

Exercice 3

Donner le développement limité à l'ordre 5 de la fonction $\tan x$.

Solution : On a $\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{5!}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)}{1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}$. On procède en deux étapes :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-u} &= 1+u+u^2+u^3+u^4+u^5+\underset{u\to 0}{o}\left(u^5\right)\\
\frac{1}{1-\underbrace{\left(\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^4}{24}\right)\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)}_{u\xrightarrow[x\to 0]{}0}} &= 1+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}\right)^2+\underbrace{\cdots}_{\text{degré }>5}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{4}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\
&= 1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

On multiplie ensuite les deux DL,

$$\begin{aligned}
\frac{\sin x}{\cos x} &= \left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{5\times 24}\right)\times\left(1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}\right)+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\
&= x+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)x^3+\left(\frac{5}{24}-\frac{1}{12}+\frac{1}{5\times 24}\right)x^5+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)\\
&= x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\underset{x\to 0}{o}\left(x^5\right)
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de terme pair, la fonction tangente étant impaire (ouf !).

Exercice type 4

Soit f définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x}$, à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2, prolonger f en $x=0$ et placer la courbe par rapport à la tangente.

Solution : On a $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$ et $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^3\right)$, par différence des développements limités, et division par x (ce qui abaisse l'ordre de 1), on a

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - x + \frac{x^3}{6}}{x} + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\\ &= 0 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right)\end{aligned}$$

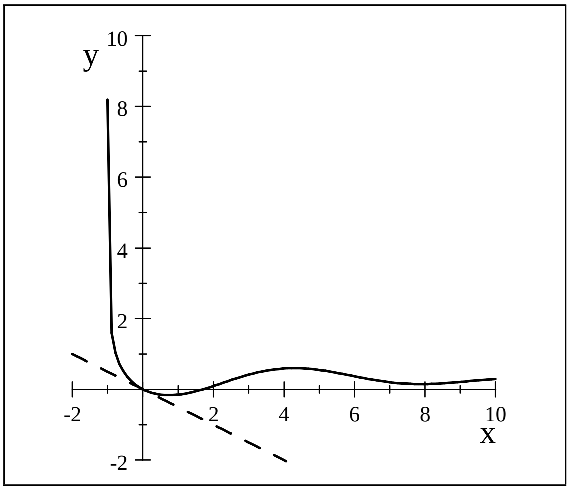
On sait alors (cours) que si l'on pose $f(0) = 0$, alors f est continue en 0, dérivable en $x = 0$ avec $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. L'équation de la tangente en 0 est

$$y_T = 0 - \frac{1}{2}x$$

Puisque

$$f(x) - y_T = \frac{1}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x^2 \geqslant 0$$

La courbe est localement au dessus de sa tangente.
Voici le graphe de f, on a $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$ et $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0^+$.



Exercice type 5

Donner le développement limité à l'ordre 2 en $x = 1$ de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.

Solution : On pose $x = 1 + h$, ainsi $h \xrightarrow[x\to 1]{} 0$, ainsi

$$\sqrt{1+\sqrt{x}} = \sqrt{1+\sqrt{1+h}}$$

Puisque

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \underset{u\to 0}{o}\left(u^2\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{1+h}} &= \sqrt{1+1+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)}\\
&= \sqrt{2+\frac{1}{2}h-\frac{1}{8}h^2+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)}=\sqrt{2}\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{4}h-\frac{1}{16}h^2+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)}_{u\xrightarrow[h\to0]{}0}}\\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h-\frac{1}{16}h^2\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}h-\frac{1}{16}h^2\right)^2+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)\right)\\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}h-\frac{1}{16}h^2\right)-\frac{1}{8\times16}h^2\right)+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)\\
&= \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{8}h-\frac{5}{8\times16}h^2\right)+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)\\
&= \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}h-\frac{5\sqrt{2}}{128}h^2+\underset{h\to0}{o}\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

On revient en x, pour avoir

$$\sqrt{1+\sqrt{x}}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}(x-1)-\frac{5\sqrt{2}}{128}(x-1)^2+\underset{x\to1}{o}\left((x-1)^2\right)$$

Remarque : On a bien $f(1)=\sqrt{2}$ (terme constant) et $f'(1)=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$ car $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}\times2\sqrt{1+\sqrt{x}}}\Longrightarrow f'(1)=\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

Exercice 4

A l'aide de développements limités, calculer $\displaystyle\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}$.

Solution : On a $\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)^{\frac{1}{e^x-1}}=\exp\left(\dfrac{1}{e^x-1}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)\right)$. On cherche donc la limite de $\dfrac{1}{e^x-1}\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$. On a

$$\begin{aligned}
\frac{e^x-1}{x} &= \frac{1+x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)-1}{x}=\frac{x+\frac{x^2}{2}+\underset{x\to0}{o}\left(x^2\right)}{x}\\
&= 1+\underbrace{\frac{x}{2}+\underset{x\to0}{o}(x)}_{u\xrightarrow[x\to0]{}0}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right) &= \ln(1+u)\underset{u\to0}{\sim}u\\
&\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}+\underset{x\to0}{o}(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{x}{2}
\end{aligned}$$

puis

$$\frac{1}{e^x-1}\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{x}\Longrightarrow\frac{1}{e^x-1}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\underset{x\to0}{\sim}\frac{1}{2}$$

Par continuité de l'exponentielle en $\frac{1}{2}$, on a

$$\frac{1}{e^x-1}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)\xrightarrow[x\to0]{}\sqrt{e}$$

Exercice type 6

Soit f définie par $f(x) = x\exp\left(\dfrac{1}{x-1}\right)$ sur $\mathbb{R}\diagdown\{1\}$, à l'aide d'un développement asymptotique, étudier les asymptotes éventuelles de f.

Solution : Au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$, la fonction est définie, on pose alors $x = \dfrac{1}{h}$, on a

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h}\exp\left(\frac{h}{1-h}\right)$$

On a

$$\begin{aligned}
\frac{h}{1-h} &= h\left(1 + h + \underset{h\to 0}{o}(h)\right) = h + h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)\\
\exp\left(\frac{h}{1-h}\right) &= e^{h+h^2+\underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)} = 1 + \left(h + h^2\right) + \frac{\left(h+h^2\right)^2}{2} + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)\\
&= 1 + h + \frac{3}{2}h^2 + \underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)
\end{aligned}$$

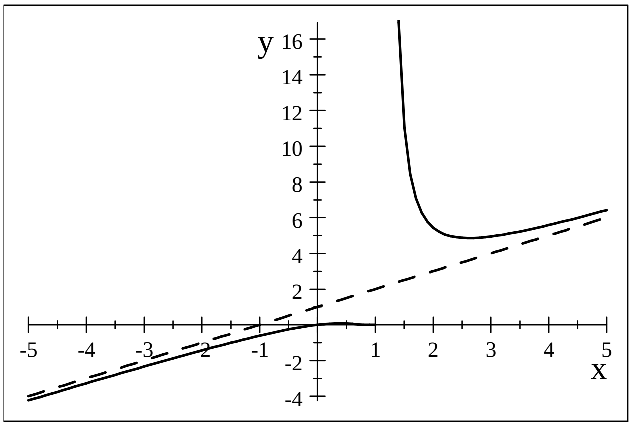
d'où

$$f\left(\frac{1}{h}\right) = \frac{1}{h} + 1 + \frac{3}{2}h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Ce qui donne

$$f(x) = x + 1 + \frac{3}{2x} + \underset{x\to\pm\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que $f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. La droite $y = x+1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$, puisque $\dfrac{3}{2x} > 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est au dessus de son asymptote.
En $-\infty$, on a $f(x) - (x+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x} \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. La droite $y = x+1$ est asymptote à la courbe en $-\infty$, puisque $\dfrac{3}{2x} < 0$ au voisinage de $-\infty$, la courbe est en dessous de son asymptote.
Voici le graphe de f et de l'asymptote.



Exercice 5

Etudier la fonction f définie par $f(x) = x^{1-\frac{1}{x^2}}$.

Solution : On a $f(x) = x\exp\left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) = \exp\left(\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)\ln x\right)$, ainsi $D_f =]0,+\infty[$.

Etude aux bornes :

en $+\infty$: On a $\dfrac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (croissances comparées, $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x^2)$) donc $\exp\left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On a ainsi $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ (DA $y=x$), puis $f(x) - x = x\left(\exp\left(-\dfrac{\ln x}{x^2}\right) - 1\right)$. Puisque $u = -\dfrac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a

$$\exp\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right) - 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x^2} \Longrightarrow x\left(\exp\left(-\frac{\ln x}{x^2}\right) - 1\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

La droite $y = x$ est asymptote en $+\infty$. De plus $f(x) - x \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe est sous l'asymptote en $+\infty$.

En 0^+ On a $f(x) = \exp\left(\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)\ln x\right)$, or $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2}\right)\ln x \underset{x\to0^+}{\sim} -\dfrac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x\to0]{} +\infty$ donc

$$f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} +\infty$$

Variations : On a $f(x) = \exp(g(x))$ où $g(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x^2}\right)\ln x$ donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) f(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)\ln x + \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{2\ln x + x^2 - 1}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3} \end{aligned}$$

La fonction h est dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $h'(x) = \dfrac{2}{x} + 2x = 2\dfrac{x^2+1}{x} > 0$. On en déduit que h est croissante sur $]0,+\infty[$. Puisque $h(1) = 0$, on a

$$\begin{aligned} h(x) &< 0 \text{ et donc } f'(x) < 0 \text{ si } x < 1 \\ h(x) &> 0 \text{ et donc } f'(x) > 0 \text{ si } x < 1 \end{aligned}$$

La fonction f est donc décroissante sur $]0,1]$ puis croissante sur $[1,+\infty[$, voici son graphe avec l'asymptote (on a un minimum en $x=1$, où la courbe coupe l'asymptote).