Chapitre 6 : Equations différentielles du premier ordre

Démonstration de cours 1

Soit f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2$, $f(t+u) = f(t) f(u)$ alors $f = 0$ ou il existe $a \in \mathbb{C}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{at}$.

Preuve : Avec $t = u = 0$, on obtient $f(0)^2 = f(0)$ d'où $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.
Si $f(0) = 0$, avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque et $u = 0$, on obtient $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = 0$ et f est la fonction nulle.
Supposons donc $f(0) = 1$. On dérive l'égalité $f(t+u) = f(t) f(u)$ par rapport à u, ce qui donne

$$\forall (t,u) \in \mathbb{R}^2, f'(t+u) = f(t) f'(u)$$

Avec $u = 0$, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = af(t) \text{ où } a = f'(0)$$

Ainsi f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ avec la condition initiale $y(0) = 1$. Ceci prouve que $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) = e^{at}$.

∎

Exercice type 1

Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} (1+e^x) y' + e^x y = 0 \\ y(\ln(2)) = 3 \end{cases}$

Solution : Puisque $1+e^x \neq 0$, l'équation différentielle s'écrit $y' + \dfrac{e^x}{1+e^x} y = 0$. La fonction a définie par $a(x) = +\dfrac{e^x}{1+e^x}$ est bien continue sur $\mathbb{R}$, les solutions sont donc

$$y(x) = K \exp\left(-\int \frac{e^x}{1+e^x} dx\right) = K \exp(-\ln(1+e^x)) = \frac{K}{1+e^x} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

La condition initiale donne $y(\ln 2) = \dfrac{K}{3} = 3 \Longrightarrow K = 9$ et $y(x) = \dfrac{9}{1+e^x}$.

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle (E) : $(1+|x|) y' + xy = 0$.

Solution : La fonction $x \longmapsto (1+|x|)$ ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$, ainsi $(E) \Longleftrightarrow y' + \dfrac{x}{1+|x|} y = 0$. La fonction a définie par $a(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. On sait que les solutions sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$y(x) = K \exp\left(-\int a(t)\, dt\right) \text{ où } \int a(t)\, dt \text{ est une primitive de } a$$

La difficulté réside dans le calcul de la primitive. Pour cela, on choisit comme primitive

$$A : x \longmapsto \int_0^x a(t)\, dt = \int_0^x \frac{t}{1+|t|} dt$$

Les solutions de (E) sont alors les fonctions y telles que

$$y(x) = K \exp\left(-\int_0^x \frac{t}{1+|t|} dt\right) \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ (on peut même préciser que } K = y(0)\text{)}$$

Pour $x \geqslant 0$, et $t \in [0,x]$, on a $a(t) = \dfrac{t}{1+t} = \dfrac{t+1-1}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$ d'où

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x \frac{t}{1+|t|}dt = \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = [t - \ln|1+t|]_0^x \\ &= x - \ln(1+x) \text{ car } x \geqslant 0 \end{aligned}$$

Pour $x \leqslant 0$, et $t \in [x,0]$, on a $a(t) = \dfrac{t}{1-t} = \dfrac{t-1+1}{1-t} = -1 + \dfrac{1}{1-t}$ d'où

$$\begin{aligned} A(x) &= \int_0^x \frac{t}{1+|t|}dt = \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t}\right) dt = [-t - \ln|1-t|]_0^x \\ &= -x - \ln(1-x) \text{ car } x \leqslant 0 \end{aligned}$$

Pour conclure, les solutions sur $\mathbb{R}$ sont définies par

$$y(x) = \begin{cases} Ke^{-x}(1+x) \text{ si } x \geqslant 0 \\ \\ Ke^{x}(1-x) \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} \quad \text{où } K \in \mathbb{R}$$

Exercice type 2

Résoudre l'équation différentielle $\left(1-x^2\right) y' - xy = 1$ sur $]-1,1[$.

Solution : On a pour $x \in]-1,1[$, $1 - x^2 \neq 0$, l'équation s'écrit donc

$$y' - \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2}$$

La fonction $a(x) = -\dfrac{x}{1-x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, les solutions de l'équation homogène sur $\mathbb{R}$ sont donc

$$y(x) = K \exp\left(-\int -\frac{xdx}{1-x^2}\right) = \frac{K}{\sqrt{1-x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

car $\dfrac{-x}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1-x^2\right)'}{1+x^2}$.

On cherche une solution particulière en utilisant la méthode de la variation de la constante. On pose $y(x) = \dfrac{K(x)}{\sqrt{1-x^2}}$, alors

$$y' - \frac{x}{1-x^2} y = \frac{1}{1-x^2} \iff \frac{K'(x)}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{1-x^2} \iff K'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

On choisit $K(x) = \arcsin(x)$. Les solutions de l'équation différentielle initiale sont donc

$$y(x) = \frac{K + \arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Exercice 2

Résoudre l'équation différentielle

$$(e^x + 1)y' - y = \frac{e^x}{1+x^2} \qquad (E)$$

Donner la solution f telle que $f(0) = -\dfrac{\pi}{4}$. Simplifier l'expression de f pour $x > 0$.

Solution : On a $e^x+1\neq 0$ pour tout x réel. On résout donc sur $\mathbb{R}$. On sait que les solutions sont les fonctions de la forme

$$y(x)=K\exp\left(\int\frac{1}{1+e^x}dx\right)\quad\text{où } K\in\mathbb{R}$$

Or $\displaystyle\int\frac{1}{1+e^x}dx=\int\frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx=x-\ln(1+e^x)+Cste$ (Pour avoir toutes les primitives de $x\longmapsto\dfrac{1}{1+e^x}$, il faut mettre une constante, mais on ne cherche que l'une d'entre elles. On prendra donc la constante nulle. Si on n'a pas vu l'astuce, on pose $u=e^x$ (changement de variable $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$) alors

$$\begin{aligned}du&=e^xdx\Longrightarrow\frac{1}{1+e^x}dx=\frac{du}{u(1+u)}=\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du\\\int\frac{1}{1+e^x}dx&=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)du=\ln u-\ln(1+u)+Cste=\ln\frac{e^x}{1+e^x}+Cste\end{aligned}$$

Les solutions de (E_1) sont donc

$$K\frac{e^x}{1+e^x}\quad\text{où } K\in\mathbb{R}$$

On utilise ensuite la variation de la constante. On pose $y(x)=K(x)\dfrac{e^x}{1+e^x}$. On a $y(x)$ solution de (E) si et seulement si

$$(e^x+1)\times K'(x)\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{e^x}{1+x^2}\Longrightarrow K'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

On choisit $K(x)=\arctan x$. Les solutions de (E) sont donc

$$y(x)=(K+\arctan x)\frac{e^x}{1+e^x}\quad\text{où } K\in\mathbb{R}$$

Pour trouver la solution f telle que $f(0)=-\frac{\pi}{4}$, on résout $(K+\arctan 0)\dfrac{e^0}{1+e^0}=\dfrac{K}{2}=-\dfrac{\pi}{4}\Longrightarrow K=-\dfrac{\pi}{2}$, ainsi

$$f(x)=\left(\arctan x-\frac{\pi}{2}\right)\frac{e^x}{1+e^x}=-\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\frac{e^x}{1+e^x}$$

car pour $x>0$, on a

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$(1+x^2)y'+xy=\sqrt{1+x^2}\qquad(E).$$

1. Déterminer la solution $f_m:\mathbb{R}\longmapsto\mathbb{R}$ de cette équation (E) telle que $f_m(1)=\sqrt{2}m$.
2. Ecrire une équation de la tangente T_m au point A, de coordonnées $(1,\sqrt{2}m)$, sur la courbe Γ_m représentative de f_m.
3. Prouver que, lorsque m parcourt $\mathbb{R}$, toutes ces tangentes T_m sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.

Solution :

1. Puisque $1+x^2\neq 0$, l'équation différentielle (E) est équivalente à $y'+\dfrac{x}{1+x^2}y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Puisque $a(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ et $b(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ sont continues sur $\mathbb{R}$, on peut appliquer le cours.

   Les solutions de l'équation homogène sont $y(x)=K\exp\left(-\displaystyle\int\frac{x}{1+x^2}dx\right)=K\exp\left(-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|\right)=\dfrac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ où

$K \in \mathbb{R}$ (on enlève la valeur absolue car $1 + x^2 > 0$).
On cherche une solution particulière par la méthode de la variation de la constante. On pose alors $y(x) = \dfrac{K(x)}{\sqrt{1+x^2}}$, ainsi

$$y'(x) + \frac{x}{1+x^2} y(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff \frac{K'(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff K'(x) = 1$$

On choisit $K(x) = x$.
Les solutions, sur $\mathbb{R}$, sont donc

$$y(x) = \frac{x+K}{\sqrt{1+x^2}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

Avec les conditions initiales, on a $f_m(x) = \dfrac{x+K}{\sqrt{1+x^2}} \Longrightarrow f_m(1) = \dfrac{1+K}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}m \Longrightarrow K = 2m - 1$. Ainsi

$$f_m(x) = \frac{x + 2m - 1}{\sqrt{1+x^2}}$$

2. Une équation de la tangente en A est
$$y - f_m(1) = f_m'(1)(x-1)$$
Puisque $f_m(1) = \sqrt{2}m$, en reportant dans l'équation différentielle, on obtient
$$(1 + 1^2) f_m'(1) + 1 \times f_m(1) = \sqrt{1+1^2} \Longrightarrow f_m'(1) = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}m}{2} = \frac{1-m}{\sqrt{2}}$$
Une équation de la tangente est donc
$$T_m : y = \sqrt{2}m + \frac{1-m}{\sqrt{2}}(x-1)$$

3. Analyse : Si ces tangentes sont concourantes en un point B de coordonnées (x, y), alors, pour $m = 1$, on obtient
$$y = \sqrt{2}$$
Puis pour $m = 0$, $\sqrt{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x-1) \Longrightarrow x = 3$.
Synthèse : On vérifie que, pour tout $m \in \mathbb{R}$,
$$\sqrt{2} = \sqrt{2}m + \frac{1-m}{\sqrt{2}}(3-1) = \sqrt{2}m + (1-m)\sqrt{2}$$
Ce qui est vrai et prouve que $B : \left(3, \sqrt{2}\right)$ est sur toutes les tangentes T_m.

Exercice type 3

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $(2+x)\,y' + y = 2$.

Solution : On résout sur $I_1 =]-\infty, -2[$ ou sur $I_2 =]-2, +\infty[$, l'équation est équivalente à $y' + \dfrac{1}{2+x} y = \dfrac{2}{2+x}$. Les fonctions $a(x) = \dfrac{1}{2+x}$ et $b(x) = \dfrac{2}{2+x}$ sont continues sur I_k.
L'équation sans second membre est $y' + \dfrac{1}{2+x} y = 0$. Elle admet sur I_k comme solution

$$y(x) = C_k \exp\left(-\int \frac{dx}{2+x}\right) = C_k \exp(-\ln|2+x|) = \frac{C_k}{|2+x|} \text{ où } C_k \in \mathbb{R}$$

Quitte à changer C_1 en $-C_1$, les solution sont donc $y(x)=\dfrac{C_k}{2+x}$ sur I_k.
Une solution évidente est $y_p(x)=2$. Les solutions sur I_k sont donc de la forme

$$2+\frac{C_k}{2+x} \text{ où } C_k\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Solutions sur } \mathbb{R} :}$
Analyse : Une solution sur $\mathbb{R}$ est une solution sur I_1 et sur I_2, et est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$ donc en $x=-2$. Il existe donc C_1 et C_2 tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= 2+\frac{C_1}{2+x} \text{ si } x<-2 \\ y(x) &= 2+\frac{C_2}{2+x} \text{ si } x>-2 \end{aligned}$$

Puisque y est continue en $x=-2$, elle admet une limite en $x=-2$ (et cette limite doit être la valeur obtenue pour $y(-2)$ lorsque l'on fait $x=-2$ dans l'équation différentielle , i.e. $y(-2)=2$).
Puisque $\dfrac{1}{2+x}\xrightarrow[x\to-2^+]{}+\infty$, cela impose $C_1=C_2=0$ et ainsi $y(x)=2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.
Synthèse : La fonction constante égale à 2 est clairement solution sur $\mathbb{R}$ et c'est la seule.

Exercice type 4

Déterminer les solutions sur $]0,+\infty[$ de $\ln(x)\,y'+\dfrac{y}{x}=1$.

Solution : On résout sur $I_1=]0,1[$ ou sur $I_2=]1,+\infty[$, l'équation est équivalente à $y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=\dfrac{1}{\ln x}$. Les fonctions $a(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et $b(x)=\dfrac{1}{\ln x}$ sont continues sur I_k.
L'équation sans second membre est $y'+\dfrac{1}{x\ln x}y=0$. Elle admet sur I_k comme solution

$$y(x)=C_k\exp\left(-\int\frac{dx}{x\ln x}\right)$$

Or $\dfrac{\frac{1}{x}}{\ln x}=\dfrac{u'}{u}$ où $u=\ln x$, ainsi $\int\dfrac{dx}{x\ln x}=\ln(|\ln x|)+Cste$. Les solutions de l'équation sans second membre sont donc (quitte à changer C_1 en $-C_1$ sur I_1)

$$y(x)=\frac{C_k}{\ln x} \text{ où } C_k\in\mathbb{R}$$

Pour obtenir une solution particulière, on utilise la variation de la constante. On cherche $y(x)=\dfrac{C(x)}{\ln x}$ solution de l'équation différentielle sur I_k, alors

$$\frac{C'(x)}{\ln x}=\frac{1}{\ln x}\Longrightarrow C'(x)=1$$

Ainsi

$$y_p(x)=\frac{x}{\ln x} \text{ est une solution particulière}$$

Les solutions sur I_k sont donc de la forme

$$\frac{x+C_k}{\ln x} \text{ où } C_k\in\mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Solutions sur } \mathbb{R} :}$ Une solution sur $]0,+\infty[$ est une solution sur I_1 et sur I_2, et est continue, dérivable sur $]0,+\infty[$ donc en $x=1$. Il existe donc C_1 et C_2 tels que

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{x+C_1}{\ln x} \text{ si } x<1 \\ y(x) &= \frac{x+C_2}{\ln x} \text{ si } x>1 \end{aligned}$$

Puisque y est continue en $x=1$, elle admet une limite en $x=1$ (et cette limite doit être la valeur obtenue pour $y(1)$ lorsque l'on fait $x=1$ dans l'équation différentielle , i.e. $y(1)=1$).
Or

$$\frac{x+C_1}{\ln x}\underset{x\to 1^-}{\longrightarrow}\begin{cases}-\infty \text{ si } 1+C_1>0\\ +\infty \text{ si } 1+C1<0\\ ? \text{ si } 1+C_1=0\end{cases} \quad \text{donc } 1+C_1=0$$

De même pour la limite en 1^+. Donc $C_1=C_2=-1$ et $y(x)=\dfrac{x-1}{\ln x}$ pour $x\neq 1,\ y(1)=1$. Reste à prouver que cette fonction est dérivable en $x=1$.
Pour montrer la dérivablité en $x=1$, on peut faire un DL en $x=1$ à l'ordre 1 de la fonction définie par

$$y(x)=\frac{x-1}{\ln x} \text{ et } y(1)=1$$

Mais il y a plus simple. Soit $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-1}$, alors $f(1+h)=\dfrac{\ln(1+h)}{h}=\dfrac{h-\frac{h^2}{2}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)}{h}=1-\dfrac{h}{2}+\underset{h\to 0}{o}\left(h^2\right)$. Ainsi f est continue, dérivable en $x=1$ avec $f(1)=1$, donc $y=\dfrac{1}{f}$ est continue, dérivable en $x=1$ (avec $y'(1)=-\dfrac{f'(1)}{f^2(1)}=\dfrac{1}{2}$).
Conclusion : y est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle car elle est est dérivable sur $]0,+\infty[$, solution de l'équation différentielle sur I_1 et sur I_2 et en $x=1$ (car $y(1)=1$).
Remarque : Version courte de résolution. Si y est solution sur $]0,+\infty[$ alors pour $x\in]0,+\infty[$

$$\ln(x)\,y'+\frac{y}{x}=(y\ln x)' \text{ ainsi } \ln(x)\,y'+\frac{y}{x}=1\Longleftrightarrow y\ln x=x+C$$

d'où pour $x\neq 1$,

$$y(x)=\frac{x+C}{\ln(x)}$$

Puisque y a une limite en $x=1$, la seule constante possible est $C=-1$. Reste à prouver la dérivabilité en $x=1\cdots$

Exercice type 5

Trouver les applications continues f telles que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)-\displaystyle\int_0^x tf(t)\,dt=1$.

Solution : Analyse : Si f est solution alors $f(x)=1+\int_0^x tf(t)\,dt$. Puisque la fonction $t\longmapsto tf(t)$ est continue, la fonction $F:x\longmapsto\int_0^x tf(t)\,dt$ est dérivable de dérivée égale à $F'(x)=xf(x)$. On en déduit que $x\longmapsto 1+\int_0^x tf(t)\,dt$ est dérivable de dérivée égale en x à $xf(x)$. Ceci prouve que f est dérivable et est solution de l'équation différentielle

$$y'=xy$$

On résout cette équation, les solutions sont les fonctions

$$y(x)=Ce^{\frac{x^2}{2}}$$

Mais, de plus $f(x)=1+\int_0^x tf(t)\,dt$ donne avec $x=0$ la condition initiale $f(0)=1$. Il n'y a donc qu'une seule solution

$$f(x)=e^{\frac{x^2}{2}}$$

Synthèse : On vérifie que $e^{\frac{x^2}{2}}-1=\int_0^x te^{\frac{t^2}{2}}\,dt$ ce qui est vrai car $\int_0^x te^{\frac{t^2}{2}}\,dt=\left[e^{\frac{t^2}{2}}\right]_0^x$.

Exercice type 6

On considère l'équation différentielle (E) : $2xy'+y=x$ sur $I=]0,+\infty[$. Quel est le lieu $\mathcal{H}$ des points en lesquels la tangente à une courbe intégrale est horizontale ?

Solution : Analyse : Soit $y(x)$ une solution de (E) sur $]0,+\infty[$, alors la courbe représentative de y admet une tangente horizontale en M_0 d'abscisse x_0 si et seulement si $y'(x_0) = 0$. Puisque y est solution de (E), on en déduit que $2x_0y'(x_0) + y(x_0) = x_0 \Longrightarrow y(x_0) = x_0$. Ainsi M_0 a pour coordonnées (x_0, x_0), est donc sur la demi-droite $\mathcal{H}$ d'équation $y = x$ avec $x > 0$.
Synthèse : il s'agit de prouver que tous les points de $\mathcal{H}$ sont bien des points par lesquels passent une courbe intégrale à tangente horizontale. Soit $M_0 : (x_0, y_0)$ un point du plan avec $x_0 > 0$, on sait qu'il existe une unique solution f_k de (E) telle que $f_k(x_0) = y_0$. mais f_k étant solution de (E), on obtient

$$2x_0f_k'(x_0) + f_k(x_0) = x_0 \Longrightarrow 2x_0f_k'(x_0) + y_0 = x_0$$

Si $M_0 \in \mathcal{H}$, alors $y_0 = x_0$ et ainsi $f_k'(x_0) = 0$, cette solution a une tangente horizontale en M_0. Tous les points de $\mathcal{H}$ sont conviennent.