Chapitre 8 : Systèmes linéaires

Exercice type 1

A l'aide du Pivot de Gauß, donner une matrice échelonnée équivalente à M et préciser le rang de M lorsque

① $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ ② $M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 3 & -9 & 12 & -9 & 6 & 15 \end{pmatrix}$ ③ $M = \begin{pmatrix} m & 1 & 5 \\ -1 & 1 & m \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$

Solution : Pour ①, on a

$$M \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang vaut donc 2.
Pour ②, on a

$$M \underset{\substack{L_1 \leftrightarrow L_2 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & -2 & 4 & -4 & -2 & 6 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{2}{3} L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 & -5 & 8 & 9 \\ 0 & 3 & -6 & 6 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix}$$

Le rang vaut 3
Pour ③, on a

$$M \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ m & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 + mL_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & m+1 & 5+m^2 \\ 0 & 1 & 5+3m \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 3m+5 \\ 0 & m+1 & m^2+5 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_3 - (m+1) L_2}{\sim} \begin{pmatrix} -1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 3m+5 \\ 0 & 0 & -2m(m+4) \end{pmatrix}$$

car $m^2 + 5 - (m+1)(3m+5) = -2m^2 - 8m$

On en déduit que :
Si $m(m+4) \neq 0$ (i.e. $m \neq 0$ et $m \neq -4$), le rang vaut 3
Si $m = 0$ ou $m = -4$, le rang vaut 2.

Exercice type 2

Résoudre, avec la méthode du pivot de Gauß, les systèmes suivants :

① $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 6x + 5y = 1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2x + 3y - z = 2 \\ x + 2y - 6z = 9 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} x + 2y + z + t = 1 \\ x + 3y - z + 2t = 0 \\ 2x + y + t = 1 \end{cases}$

Solution : Pour chaque système, on écrit la matrice augmentée.
Pour ①, on a

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 2 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{3} & 0 & 8 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \end{pmatrix}$$

d'où le système équivalent $\begin{cases} 3x = 8 \\ y = -3 \end{cases}$ qui donne la solution $x = \dfrac{8}{3}, y = -3$, soit $\mathcal{S} = \left\{ \left(\dfrac{8}{3}, -3 \right) \right\}$.
pour ②, on a

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -6 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - 2L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & -6 & 9 \\ 0 & \boxed{-1} & 11 & -16 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \longleftarrow L_1 + 2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 16 & -23 \\ 0 & \boxed{-1} & 11 & -16 \end{pmatrix}$$

D'où le système équivalent $\begin{cases} \boxed{x} + 16z = -23 \\ \boxed{-y} + 11z = -16 \end{cases}$, on exprime x et y en fonction de z pour avoir

$$\begin{cases} x = -23 - 16z \\ y = 16 + 11z \\ z = z \end{cases} \text{ soit } \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -23 \\ 16 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -16 \\ 11 \\ 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{R} \right\}$$

Géométriquement, on trouve une droite de l'espace.
Pour ③, on a

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 2L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow L_3 + 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_2 \longleftarrow 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & -8 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_2 \longleftarrow L_2 - L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$
$$\underset{L_1 \longleftarrow 8L_1 + L_3}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{8} & 16 & 0 & 10 & 4 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{8} & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & \boxed{4} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-8} & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

On obtient le système équivalent $\begin{cases} \boxed{8x} + 2t = 4 \\ \boxed{4y} + 2t = 0 \\ \boxed{-8z} + 2t = -4 \end{cases}$ qui donne $z = \dfrac{t}{4} + \dfrac{1}{2}$, $y = -\dfrac{t}{2}$ et $x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{t}{4}$. D'où

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice type 3

Résoudre et discuter en fonction des paramètres les systèmes suivants :

① $\begin{cases} x - 3y + 7z = a \\ x + 2y - 3z = b \\ 7x + 4y - z = c \end{cases}$ ② $\begin{cases} (1-m)\,x + 2y - 3z = 0 \\ -2x - (3+m)\,y + 3z = 0 \\ x + y - (2+m)\,z = 0 \end{cases}$ ③ $\begin{cases} (4-m)\,x + 2y = -4 \\ -x + (1-m)\,y = m \end{cases}$

Solution : Pour chaque système, on écrit la matrice augmentée $(A|B)$.

Pour ①, on a

$$(A|B) = \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 7 & a \\ 1 & 2 & -3 & b \\ 7 & 4 & -1 & c \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - 7L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 7 & a \\ 0 & \boxed{5} & -10 & b-a \\ 0 & 25 & -50 & c-7a \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3 \longleftarrow L_3 - 5L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 7 & a \\ 0 & \boxed{5} & -10 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & c-5b-2a \end{pmatrix}$$

On a deux cas :
Si $c-5b-2a=0$, le système est compatible. On a

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & -3 & 7 & a \\ 0 & \boxed{5} & -10 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3 \longleftarrow 5L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{5} & -15 & 35 & 5a \\ 0 & \boxed{5} & -10 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 + 3L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{5} & 0 & 5 & 2a+3b \\ 0 & \boxed{5} & -10 & b-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système est équivalent à $\begin{cases} \boxed{5x} + 5z = 2a+3b \\ \boxed{5y} - 10z = b-a \end{cases} \iff \begin{cases} x = \dfrac{2a+3b}{5} - z \\ y = \dfrac{b-a}{5} + 2z \end{cases}$ et l'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{2a+3b}{5} \\ \dfrac{b-a}{5} \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{R} \right\}$$

Si $c-5b-2a \neq 0$, le système est incompatible. Pas de solutions, $\mathcal{S} = \varnothing$.
Pour ②, le système est homogène, on peut travailler uniquement sur la matrice A (le second membre est toujours nul, la dernière colonne de la matrice augmentée est toujours nulle). En particulier, il y a toujours des solutions.

$$A = \begin{pmatrix} 1-m & 2 & -3 \\ -2 & -3-m & 3 \\ 1 & 1 & -2-m \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2-m \\ -2 & -3-m & 3 \\ 1-m & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \longleftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \longleftarrow L_3 - (1-m) L_1}}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -2-m \\ 0 & -m-1 & -2m-1 \\ 0 & m+1 & -m^2-m-1 \end{pmatrix} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2+m \\ 0 & \boxed{-(m+1)} & 2m+1 \\ 0 & 0 & \boxed{-m^2-3m-2} \end{pmatrix}$$

Un pivot n'est jamais nul ! On factorise $-m^2-3m-2 = -(m+2)(m+1)$ ainsi

$$A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 2+m \\ 0 & \boxed{-(m+1)} & 2m+1 \\ 0 & 0 & \boxed{-(m+2)(m+1)} \end{pmatrix}$$

.
On a donc trois cas :
Si $m \notin \{-1,-2\}$, la matrice est de rang 3, la solution est unique et vaut $x=y=z=0$ (solution triviale d'un système homogène). $\mathcal{S} = \{(0,0,0)\}$.
Si $m=-2$, on a $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & \boxed{1} & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui donne le système équivalent $\begin{cases} \boxed{x} + 3z = 0 \\ \boxed{y} - 3z = 0 \end{cases}$
et ainsi $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} z,\ z \in \mathbb{R} \right\}$.
Si $m=-1$, on a $A \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftarrow L_1 + L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui donne $\begin{cases} \boxed{x} + y = 0 \\ \boxed{z} = 0 \end{cases}$

et ainsi $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}y,\ y\in\mathbb{R}\right\}$.
Pour ②, on a

$$\begin{aligned}(A|B) &= \begin{pmatrix}4-m & 2 & -4\\ -1 & 1-m & m\end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_1}{\sim} \begin{pmatrix}\boxed{-1} & 1-m & m\\ 4-m & 2 & -4\end{pmatrix}\\ &\underset{L_2\longleftarrow L_2+(4-m)L_1}{\sim} \begin{pmatrix}\boxed{-1} & 1-m & m\\ 0 & \boxed{m^2-5m+6} & -m^2+4m-4\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Un calcul simple (recherche des racines) donne $m^2-5m+6=(m-2)(m-3)$ et $-m^2+4m-4=-(m-2)^2$. On a donc

$$(A|B)\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{-1} & 1-m & m\\ 0 & \boxed{(m-2)(m-3)} & -(m-2)^2\end{pmatrix}$$

On a deux cas :

Si $m\neq 2$ et $m\neq 3$, le système est équivalent à $\begin{cases}\boxed{-x}+(1-m)y=m\\ (m-2)(m-3)y=-(m-2)^2\end{cases}\iff\begin{cases}x=(1-m)y-m=\dfrac{2}{m-3}\\ y=-\dfrac{m-2}{m-3}\end{cases}$

Si $m=2$, on a $(A|B)\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{-1} & -1 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, le système est compatible, équivalent à $\left\{\boxed{-x}-y=2\right.$, l'ensemble de solutions est $\mathcal{S}=\left\{\begin{pmatrix}2-y\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix},\ y\in\mathbb{R}\right\}$, c'est une droite du plan.

Si $m=3$, on a $\begin{pmatrix}\boxed{-1} & -2 & 3\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$, $rg(A)=1$ et $rg(A|B)=2$, le système est incompatible.

Exercice 1

Justifier que le système

$$\begin{cases}mx+y+mz=2m\\ x+my+z=2\\ mx+y-mz=0\end{cases}$$

est toujours compatible.

Solution : On écrit la matrice augmentée et on applique le pivot.

$$\begin{aligned}(A|B) &= \begin{pmatrix}m & 1 & m & 2m\\ 1 & m & 1 & 2\\ m & 1 & -m & 0\end{pmatrix}\underset{L_2\leftrightarrow L_1}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1} & m & 1 & 2\\ m & 1 & m & 2m\\ m & 1 & -m & 0\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\longleftarrow L_2-mL_1\\ L_3\longleftarrow L_3-mL_1}}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1} & m & 1 & 2\\ 0 & \boxed{1-m^2} & 0 & 0\\ 0 & 1-m^2 & -2m & -2m\end{pmatrix}\\ &\underset{L_3\longleftarrow L_3-L_2}{\sim}\begin{pmatrix}\boxed{1} & m & 1 & 2\\ 0 & \boxed{1-m^2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \boxed{-2m} & -2m\end{pmatrix}\end{aligned}$$

On constate que dans tous les cas, $rg(A)=rg(A|B)$. Le système est toujours compatible.
Remarque : On peut aussi raisonner ainsi :
Si $1-m^2\neq 0$ et $-2m\neq 0$, la matrice est de rang 3 avec 3 inconnues, il y a une unique solution.

Si $m=0$, le système équivalent est $\begin{cases}\boxed{x}+z=2\\ \boxed{y}=0\\ 0=0\end{cases}$ la relation de compatibilité est réalisée, il y a des solutions.

Si $1-m^2=0$, le système équivalent est $\begin{cases}\boxed{x}+z=2\\ 0=0\\ \boxed{-2mz}=-2mz\end{cases}\iff\begin{cases}\boxed{x}+z=2\\ 0=0\\ \boxed{z}=1\end{cases}$, a relation de compatibilité est réalisée,

il y a des solutions.
Le système est toujours compatible.

Exercice type 4

Pour $n \geqslant 2$, résoudre le système donné par $\forall i \in \{1, \cdots, n\}$, $x_i + \sum_{k=1}^{n} x_k = i$.

Solution : La matrice augmentée du système est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & n \end{pmatrix}$$

On commence par sommer toutes les lignes.

$$M \underset{L_1 \leftarrow L_1 + \cdots + L_n}{\sim} \begin{pmatrix} (n+1) & (n+1) & \cdots & \cdots & (n+1) & \frac{n(n+1)}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & n \end{pmatrix}$$

Puis

$$M \underset{L_1 \leftarrow \frac{L_1}{n+1}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & \frac{n}{2} \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 & n \end{pmatrix} \underset{L_i \leftarrow L_i - L_1 \text{ si } i \geqslant 2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 & \frac{n}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 - \frac{n}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & n - \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - \sum_{k=2}^{n} L_k}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \frac{n}{2} - \left(\sum_{k=2}^{n} k\right) + \frac{n}{2} \times (n-1) \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 2 - \frac{n}{2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & n - \frac{n}{2} \end{pmatrix}$$

ce qui donne $x_1 = \frac{n}{2} - \sum_{k=2}^{n} k + \frac{n}{2} \times (n-1) = \frac{n^2}{2} - \left(\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = 1 - \frac{n}{2}$ et en définitive

$$x_k = k - \frac{n}{2}$$