Chapitre 9 : Matrices

Exercice type 1

Déterminer toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : Soit $B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, on a $AB = \begin{pmatrix} 3a-b & 3c-d \\ 7a+b & 7c+d \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 3a+7c & c-a \\ 3b+7d & d-b \end{pmatrix}$. Ainsi

$$AB = BA \iff AB - BA = \bigcirc \iff \begin{pmatrix} -b-7c & a+2c-d \\ 7a-2b-7d & b+7c \end{pmatrix} = \bigcirc$$

On obtient le système $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} a+2c-d=0 \\ b+7c=0 \\ 7a-2b-7d=0 \end{cases}$. Le système est homogène, sa matrice est

$$M = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 7 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & -7 \end{pmatrix} \underset{L_3-7L_1}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 \\ 0 & -2 & -14 & 0 \end{pmatrix} \underset{L_3+2L_2}{\sim} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$(\mathcal{S}) \iff \begin{cases} \boxed{a} + 2c - d = 0 \\ \boxed{b} + 7c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c+d \\ b = -7c \end{cases}$$

Les matrices qui commutent avec A sont donc les matrices

$$B = \begin{pmatrix} -2c+d & c \\ -7c & d \end{pmatrix} \text{ où } (c,d) \in \mathbb{R}^2$$

Exercice 1

Soit $L = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ et $C = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. On suppose que $a \neq 0$.

1. Calculer LC et $A = CL$.
2. Quel est le rang de A ?
3. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $A^2 = A$.

Solution :

1. Un calcul simple donne $LC = a^2+b^2+c^2$ et $A = \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$.
2. Puisque $a \neq 0$, on a
$$A \underset{L_2-\frac{b}{a}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ 0 & 0 & 0 \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix} \underset{L_3-\frac{c}{a}L_1}{\sim} \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Ainsi $rg(A) = 1$ car $a^2 \neq 0$.
3. On a $A = CL$ d'où $A^2 = (CL)(CL) = C(LC)L = \left(a^2+b^2+c^2\right)A$. La CNS est donc $\|C\|^2 = a^2+b^2+c^2 = 1$.

Exercice type 2

On pose $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\3&-3&4\end{pmatrix}$: montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout entier $n\geqslant 0$, $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2u_n&1-2u_n&2u_n\\u_n&-u_n&1+u_n\end{pmatrix}$. En déduire une expression de A^n.

Solution : Par récurrence. On pose $\mathcal{P}(n)=$ "$\exists u_n\in\mathbb{R}$ tels que $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2u_n&1-2u_n&2u_n\\u_n&-u_n&1+u_n\end{pmatrix}$"

Initialisation : On a $\mathcal{P}(0)$ vraie en posant $u_n=0$, car $A^0=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie à un rang $n\geqslant 0$, il existe donc $u_n\in\mathbb{R}$ tel que $A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2u_n&1-2u_n&2u_n\\u_n&-u_n&1+u_n\end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{aligned}A^{n+1}&=A\times A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\6&-5&6\\3&-3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2u_n&1-2u_n&2u_n\\u_n&-u_n&1+u_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}1&0&0\\6-4u_n&4u_n-5&6-4u_n\\3-2u_n&2u_n-3&4-2u_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\2u_{n+1}&1-2u_{n+1}&2u_{n+1}\\u_{n+1}&-u_{n+1}&1+u_{n+1}\end{pmatrix}\\ \text{Avec } u_{n+1}&=3-2u_n.\end{aligned}$$

La récurrence est établie, cela prouve l'existence de u_n pour tout $n\in\mathbb{N}$ donc de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
On a donc $u_0=0$ et $u_{n+1}=3-2u_n$. Soit ℓ tel que $\ell=3-2\ell$, alors

$$u_{n+1}-\ell=(3-2u_n)-(3-2\ell)=-2(u_n-\ell)$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n=u_n-\ell$ est donc géométrique de raison -2. On en déduit que

$$v_n=(-2)^n v_0\Longrightarrow u_n=\ell+(-2)^n v_0$$

Avec $\ell=1$ et $v_0=u_0-\ell=-1$, on a

$$u_n=1-(-2)^n$$

Ainsi

$$A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2(1-(-2)^n)&1-2(1-(-2)^n)&2(1-(-2)^n)\\1-(-2)^n&-(1-(-2)^n)&1+(1-(-2)^n)\end{pmatrix}$$

Exercice type 3

Calculer A^n pour $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&3&1\\1&1&3\end{pmatrix}$

Solution : On écrit que $A=2I_3+J$ où $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. Les matrices $2I_3$ et J commutent (λI_3 commute avec toutes les matrices). Mais $J^2 = 3J$ d'où par récurrence si $\mathbf{n} \geqslant \mathbf{1}$, $J^n = 3^{n-1}J$. D'après le binôme de Newton

$$\begin{aligned} A^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (J)^k (2I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (J)^k I_3 = 2^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (J)^k \\ &= 2^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} \right) J \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k-1} = \frac{1}{3} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k} \right) = \frac{1}{3} \left(-2^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} 3^{k} \right) = \frac{1}{3} (5^n - 2^n)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} A^n &= 2^n I_3 + \frac{1}{3} (5^n - 2^n) J = 2^n \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} (5^n - 2^n) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \times 2^n + 5^n & 5^n - 2^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 2 \times 2^n + 5^n & 5^n - 2^n \\ 5^n - 2^n & 5^n - 2^n & 2 \times 2^n + 5^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que pour $n = 0$, on a I_3, $n = 1$ on a A.

Exercice type 4

Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $B = I_3 + N$. Puisque $I_3 N = N I_3 = N$, on peut appliquer le binôme. On a donc

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$$

Puisque $I_3^{n-k} = I_3$, on a $N^k I_3^{n-k} = N^k$. Mais un calcul simple donne

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N^3 = \bigcirc$$

Ainsi $N^k = \bigcirc$ pour $k \geqslant 3$.
On peut donc écrire que

$$B^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} N^k$$

En effet (attention), si $n \geqslant 3$, alors $N^k = 0$ pour $k \geqslant 3$, on peut donc enlever ces termes de la somme. Si $n = 2$, c'est vrai, et si $n = 0$ ou 1, on a ajouté deux termes à la somme, mais le coefficient binômial vaut 0 si $k \geqslant n$. Les termes ajoutés sont donc nuls.
Pour finir, on a ainsi

$$\begin{aligned} B^n &= \binom{n}{0} N^0 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & n & n + \dfrac{n(n-1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n & \dfrac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On vérifie que pour $n=1$, on retrouve bien B.

Exercice type 5

Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe un unique couple (S,A) où $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ tel que $M=S+A$.

Donner ce couple lorsque $M=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}$.

Solution : Unicité : Si $M=S_1+A_1=S_2+A_2$ avec $(S_1,S_2)\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})^2$ et $(A_1,A_2)\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})^2$, alors par différence, on a

$$S_1-S_2=A_2-A_1$$

La matrice $B=S_1-S_2$ est donc symétrique et antisymétrique. On a donc ${}^tB=B=-B$ d'où $B=\bigcirc$. On en déduit que $S_1=S_2$ et $A_1=A_2$.

Existence : Soit $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, posons $S=\dfrac{M+{}^tM}{2}$ et $A=\dfrac{M-{}^tM}{2}$, alors $S\in\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $A\in\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et $M=S+A$.

Application : $S=\dfrac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-2\\1&0&2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}$ et $A=M-S=\begin{pmatrix}1&0&1\\2&-1&0\\3&-2&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&1&2\\1&-1&-1\\2&-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&-1\\1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$.

Exercice type 6

On pose $A=\begin{pmatrix}2&1&3\\2&3&6\\-1&-1&-2\end{pmatrix}$ et $M=A-I_3$. Calculer M^2, en déduire que A est inversible et préciser A^{-1}.

Solution : Un calcul simple donne $M^2=\bigcirc$. On en déduit que

$$(A-I_3)^2=A^2-2AI_3+I_3=A^2-2A+I_3=\bigcirc$$

Pour déterminer l'inverse de A, on exprime I_3 à l'aide de A et de A^2. On a donc

$$I_3=2A-A^2=2AI_3-A^2=A(2I_3-A)$$

Ceci prouve que A est inversible et que $A^{-1}=2I_3-A=\begin{pmatrix}0&-1&-3\\-2&-1&-6\\1&1&4\end{pmatrix}$.

Attention à ne pas écrire que $I_3=A(2-A)$, cela n'a **aucun sens**, on ne peut faire la différence entre le nombre 2 et la matrice A !

Exercice type 7

Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1\\0&2&1\end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

Solution : On accole à A la matrice identité pour obtenir

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&0&0\\1&1&1&0&1&0\\0&2&1&0&0&1\end{array}\right)$$

On sait que si, par opérations élémentaires sur les lignes, on transforme A en I_4, alors la même suite d'opérations élémentaires transforme I_4 en A^{-1}. On a donc

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_2-\mathcal{L}_1}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\mathcal{L}_3-2\mathcal{L}_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\underset{\mathcal{L}_1-\mathcal{L}_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 1 \end{array}\right) \text{ d'où } A \text{ inversible et } A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$