PCSI2 - Programme de kholle : colle 18

Chapitre 13 : Dérivabilité

Définition de la dérivée en a d'une fonction. Dérivée à droite et à gauche. Lien avec la continuitée (f dérivable $\Longrightarrow$ f continue). Lien avec les DL1 (f dérivable en a $\Longleftrightarrow$ f a un DL1 en a). Dérivée en un extremum local en a intérieur à I. Fonction dérivée f', propriétés opératoires (dérivée de $\lambda f+\mu g$, $fg\cdots$, d'une composée, démontrée via les DL1). Dérivée d'une réciproque. Dérivées énièmes, formule de Leibniz. Théorème de Rolle, des accroissements finis, inégalité des AF. Utilisation pour l'étude de suites $u_{n+1}=f(u_n)$ (**Révision**). Théorème limite de la dérivée (dit aussi du prolongement $\mathcal{C}^1$).

Chapitre 14 : Ensembles, entiers, dénombrement

Notions élémentaires sur les ensembles. Indicatrice d'un ensemble, $\mathbb{1}_A(x)=\left\{\begin{array}{l}1 \text{ si } x\in A\\ 0 \text{ si } x\notin A\end{array}\right.$. Indicatrice d'une réunion, d'une intersection, du complèmentaire.

Récurrence à un terme, à deux termes, récurrence forte.Manipulation des symboles $\sum\limits_{n\geq 0}$ et $\prod\limits_{n\geq 0}$, sommes doubles sur un rectangle, un triangle.

Merci de donner si possible, une somme double à chaque étudiant. Merci

Exercices types

- Soit $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ qui est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, on a montré qu'il existe un polynôme P_n tel que $\forall x\in\mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)=\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$. En particulier, on a $\forall x\in\mathbb{R}$, $\left(1+x^2\right)f'(x)+2xf(x)=0$. En dérivant cette relation n fois, montrer que

$$\forall x\in\mathbb{R},\ P_{n+1}(x)+2(n+1)x\,P_n(x)+n(n+1)\left(1+x^2\right)P_{n-1}(x)=0$$

- On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=\cos(u_n)$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,1]$, que la fonction cos est lipschtzienne sur $[0,1]$ et que l'équation $\cos x=x$ a une unique solution ℓ dans $[0,1]$. Montrer que $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell$.
- Soit h définie par $h(x)=\left(x^2+x+1\right)e^x$ et $n\in\mathbb{N}$, calculer $h^{(n)}(x)$.
- Soit E un ensemble, pour $(A,B)\in\mathcal{P}(E)^2$, on définit la différence symétrique $A\Delta B=(A\cup B)\backslash(A\cap B)$.②Exprimer $\mathbb{1}_{A\Delta B}$ à l'aide de $\mathbb{1}_A$ et de $\mathbb{1}_B$. ②Montrer que si $(A,B,C)\in\mathcal{P}(E)^3$, on a $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$
- Montrer que,$\forall p\in\mathbb{N},\forall n\in\mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}$. Faire une récurrence sur n, à p fixé. Pour mémoire, $\binom{k}{p}=0$ si $p>k$.
- Calculer $\sum\limits_{0\leq p\leq q\leq n}2^p$ de deux manières, en déduire la valeur de $\sum\limits_{p=0}^{n}p2^p$.