PCSI2 - Programme de kholle : colle 28

Chapitre 21 : Déterminants

Introduction aux dét par le calcul de l'aire d'un parallèlogramme et du volume d'un parallélépipède. Déterminant d'une matrice carrée : il existe une unique application linéaire par rapport à chaque colonne, antisymétrique, valant 1 sur I_n. Cas de matrices diagonales. Opération sur les colonnes et les lignes. Matrices inversibles, caractérisation des bases. Déterminant d'un produit, d'n endomorphisme, de la transposée. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Dét d'une matrice triangulaire.

Chapitre 22 : Probabilité

Vocabulaire, événeménts, incompatibilité. Définition d'une probabilité sur Ω fini. Probabilité uniforme ($\mathbb{P}(A) = \dfrac{\#A}{\#\Omega}$). Propriétés élémentaires, croissance de $\mathbb{P}$. Définition de $\mathbb{P}$ sur Ω par la donnée des $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ où $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$. Probabilités totales $\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$ où $(A_i)_{i \in I}$ est un SCE (système complet d'événements).

Probabilités conditionnelles, définition, l'application $\mathbb{P}_B : A \longmapsto \mathbb{P}_B(A)$ est une probabilité sur Ω. Formule des probabilités composées. Formules des probabilités totales version conditionnelle. Formules de Bayes. Indépendance : couple d'événements, indépendances mutuelles.

▶ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, et pour $n \geq 1$, $D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & & \bigcirc \\ b & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ \bigcirc & & b & a+b \end{vmatrix}$, montrer que $(D_n)_n$ est une suite récurrente d'ordre 2 puis calculer D_n.

▶ Soit $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit $V(a_1, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$. On suppose que les $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont deux à deux distincts.

1. On définit $P(x) = V(a_1, \cdots, a_{n-1}, x)$, montrer que P est un polynôme de degré au plus $n-1$. Préciser le coefficient de x^{n-1} dans $P(x)$.
2. Déterminer les racines de P, en déduire la factorisation de P.
3. Donner la valeur de $V(a_1, \cdots, a_n)$. Que dire si deux des $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont égaux ?

▶ Une galette des rois a été divisée en 12 parts, dont une seule contient la fève. On distribue une part à chacun des 12 convives, l'un après l'autre et dans un ordre fixé par le plus jeune. Montrer que chaque convive a la même probabilité d'avoir la fève.

▶ Une guêpe entre par inadvertance dans un appartement composé de deux pièces A et B. A l'instant $t = 0$ elle est dans la pièce A. Elle évolue alors ainsi : si à l'instant n elle est :

① dans la pièce A, elle y reste avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{3}$ et passe en B avec une probabilité égale à $\dfrac{2}{3}$.

② dans la pièce B, elle y reste avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{2}$, passe en A avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{4}$ et quitte l'appatement avec une probabilité égale à $\dfrac{1}{4}$.

Une fois sortie de l'appartement, la guêpe n'y revient plus.

On note A_n, B_n et C_n les événements "La guêpe est à l'instant n dans la pièce A" $\cdots$ (je laisse au lecteur le soin de deviner ce que sont B_n et C_n),et $a_n = \mathbb{P}(A_n), \cdots$

1. Donner les valeurs de a_0, b_0, c_0. Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n. Comparer a_{n+1} et b_{n+1}.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 4a_n + 3b_n$ est géométrique, et que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $v_n = 2a_n - b_n$ est constante à partir d'un certain rang. En déduire, pour $n \geq 1$ la valeur de a_n, b_n et c_n en fonction de n. Interpréter $\lim_{n \to +\infty} c_n$.