Chapitre 4 : Bases du calcul intégral

Intégration (On admet que si f est continue sur I alors elle admet des primitives ce qui permet de définir l'intégrale entre deux bornes).

Ainsi seules les fonctions continues sont intégrables (je demande aux élèves de vérifier que la fonction est bien définie et de préciser qu'elle est continue sur l'intervalle d'intégration. La notion de continuité sera étudiée plus tard).

Définition d'une primitive. Notation $\int f(x)\,dx$. Calcul des primitives de $e^{\alpha x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ et application. Primitive de $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où $a \neq 0$. Primitives usuelles.

Théorème fondamental du calcul intégral : Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et si $a \in I$, alors $\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f telle que $F(a) = 0$. Exemples de fonction du type $\displaystyle\int_{v(x)}^{u(x)} f(t)\,dt$.

Intégration par parties (les fonctions doivent être $\mathcal{C}^1$) exemple d'utilisation pour le calcul d'intégrale ou pour obtenir des relations de récurrence sur des suites.

Changement de variables.

Merci de vérifier sur un exemple simple qu'ils savent faire une IPP et un changement de variables. Donner si possible un exemple d'intégrale fonction de ses bornes.

Exercices types .

- ▶ Calculer les primitives de ① $e^{-x}\sin(2x)$, ② $\dfrac{1}{x^2-5x+6}$ et ③ $\dfrac{1}{x^2+2x+3}$.
- ▶ Soit $F(x) = \displaystyle\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{\arctan t}{t}\,dt$, quel est le domaine de définition de F ? Calculer $F'(x)$ et en déduire F.
- ▶ Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, donner une relation de récurrence pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire que $(n+1)\,I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour $n \geq 0$.
- ▶ CCalculer $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$ en posant $x = \cos\varphi$.

Bonnes Vacances à vous tous.